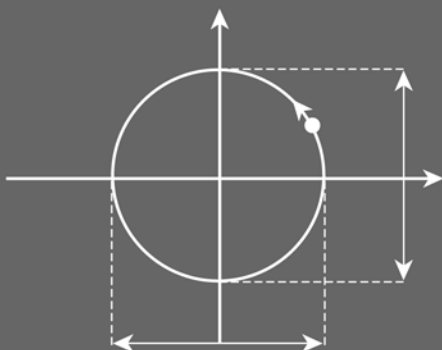


☀ 8강 ☀

해밀토니안 역학과 시간 이동 불변



레니와 조지가 들어섰을 때, 독은 바에 앉아
늘 마시던 비어 밀크셰이크를 마시며 신문을 읽고 있었다.

“뭘 읽고 있나, 독?”

독은 안경 너머로 레니를 올려다보았다.

“이 아인슈타인이라는 녀석이 ‘똑같은 일을 계속 반복해서 하면서
다른 결과를 기대한다면 제정신이 아니다.’라고 말한 걸 보고 있네.

어떻게 생각하나?”

연습 문제 1: 라그랑지안 $L = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{k}{2} x^2$ 에서 시작해 변수 x 를 $q = (km)^{1/4} x$ 로 바꾸면 라그랑지안이 식 (14)의 형태가 된다는 것을 보여라. k, m, ω 사이의 관계는 무엇인가?

$$\text{식 (14): } L = \frac{1}{2\omega} \dot{q}^2 - \frac{\omega}{2} q^2$$

해답:

$$q = (km)^{1/4} x, \quad x = \frac{q}{(km)^{1/4}}$$

$$\dot{q} = (km)^{1/4} \dot{x}, \quad \dot{x} = \frac{\dot{q}}{(km)^{1/4}}$$

$$L = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{k}{2} x^2 = \frac{m}{2} \frac{\dot{q}^2}{(km)^{1/2}} - \frac{k}{2} \frac{q^2}{(km)^{1/2}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{k}{m}}} \dot{q}^2 - \frac{\sqrt{\frac{k}{m}}}{2} q^2 = \frac{1}{2\omega} \dot{q}^2 - \frac{\omega}{2} q^2.$$

이때 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ 이다.

연습 문제 2: 식 (14)에서 시작해 p 와 q 에 관한 해밀토니안을 계산하라.

$$\text{식 (14): } L = \frac{1}{2\omega} \dot{q}^2 - \frac{\omega}{2} q^2$$

해답: 해밀토니안의 정의에 따라

$$H = p\dot{q} - L = T + V$$

이다. $L = T - V$, $T = \frac{1}{2\omega} \dot{q}^2$, $V = \frac{\omega}{2} q^2$ 을 대입하면

$$p\dot{q} = \frac{1}{\omega} \dot{q}^2$$

$$\dot{q} = \omega p$$

이다. 따라서 p , q 에 대해 해밀토니안은

$$H = \frac{1}{2\omega} \dot{q}^2 + \frac{\omega}{2} q^2 = \frac{1}{2\omega} (\omega p)^2 + \frac{\omega}{2} q^2 = \frac{\omega}{2} (p^2 + q^2)$$

으로 표현된다.