수학 가형 정답

1	⑤	*2*	④	*3*	②	*4*	③	*5*	②
6	①	*7*	⑤	*8*	④	*9*	③	*10*	②
11	①	*12*	④	*13*	⑤	*14*	③	*15*	①
16	①	*17*	③	*18*	②	*19*	⑤	*20*	④
21	①	*22*	7	*23*	5	*24*	13	*25*	4
26	150	*27*	12	*28*	32	*29*	128	*30*	71

수학 영역

가형 해설

1. [출제의도] 벡터의 성분의 합 계산하기

$2\vec{a}+\vec{b}=2(2,\ 3)+(-1,\ 5)=(3,\ 11)$

따라서 모든 성분의 합은 $3+11=14$

2. [출제의도] 삼각함수의 값 계산하기

$\sin\frac{7}{6}\pi=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$

3. [출제의도] 좌표공간에서 선분의 길이 계산하기

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{3^2+1^2+(-3)^2}=\sqrt{19}$

4. [출제의도] 사건의 독립 이해하기

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}\times\mathrm{P}(B)=\frac{1}{6}$

따라서 $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$

5. [출제의도] 여러 가지 함수의 정적분 이해하기

$$\int_0^4(5x-3)\sqrt{x}\,dx=\int_0^4\left(5x^{\frac{3}{2}}-3x^{\frac{1}{2}}\right)dx$$
$$=\left[2x^{\frac{5}{2}}-2x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4=48$$

6. [출제의도] 함수의 연속 이해하기

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=2$

$\lim_{x\to0-}\frac{e^{ax}-1}{3x}=\lim_{x\to0-}\frac{e^{ax}-1}{ax}\times\frac{a}{3}=\frac{a}{3}$

$\lim_{x\to0+}(x^2+3x+2)=2$

따라서 $a=6$

7. [출제의도] 쌍곡선의 정의 이해하기

$13=7^2-a^2$이므로 $a=6$

따라서 $\left|\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PF'}}\right|=2a=2\times6=12$

8. [출제의도] 중복순열 이해하기

세 자리 자연수가 홀수이려면 일의 자리의 숫자는 홀수이어야 한다.

일의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1$

백의 자리와 십의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는 ${}_5\Pi_2$

따라서 세 자리 자연수가 홀수인 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_1\times{}_5\Pi_2=3\times5^2=75$

9. [출제의도] 매개변수로 나타내어진 함수의 미분 이해하기

$\frac{dx}{dt}=1+\frac{1}{2\sqrt{t}}$, $\frac{dy}{dt}=3t^2-\frac{1}{t^2}$ 이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3t^2-\frac{1}{t^2}}{1+\frac{1}{2\sqrt{t}}}$$

따라서 $t=1$일 때, $\frac{dy}{dx}=\frac{4}{3}$

10. [출제의도] 독립시행의 확률 이해하기

앞면이 나오는 횟수를 a,

뒷면이 나오는 횟수를 b라 하면

$\begin{cases}a+b=7 & \cdots\cdots ㉠\\ a-b=3 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠, ㉡에 의하여 $a=5,\ b=2$

따라서 ${}_7\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^2={}_7\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^7=\frac{21}{128}$

11. [출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기

$(\sin x+\cos x)^2=\sqrt{3}\sin x+1$에서

$1+2\sin x\cos x=\sqrt{3}\sin x+1$

$\sin x(2\cos x-\sqrt{3})=0$

$0\le x\le\pi$이므로

$\sin x=0$일 때, $x=0$ 또는 $x=\pi$

$\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$일 때, $x=\frac{\pi}{6}$

따라서 모든 실근의 합은 $0+\pi+\frac{\pi}{6}=\frac{7}{6}\pi$

12. [출제의도] 정규분포를 활용하여 문제해결하기

이 양계장에서 생산하는 계란 1개의 무게를 확률변수 X라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(52,\ 8^2)$을 따른다.

$Z=\frac{X-52}{8}$라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(60\le X\le68)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{60-52}{8}\le Z\le\frac{68-52}{8}\right)$

$=\mathrm{P}(1\le Z\le2)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le2)-\mathrm{P}(0\le Z\le1)$

$=0.4772-0.3413=0.1359$

13. [출제의도] 조건부확률을 이용하여 문제해결하기

이 고등학교의 전체 학생 중 임의로 선택한 한 학생이 여학생일 사건을 A, 생활복 도입에 찬성한 학생일 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A^C|B)$

$=0.8\times0.7=0.56$

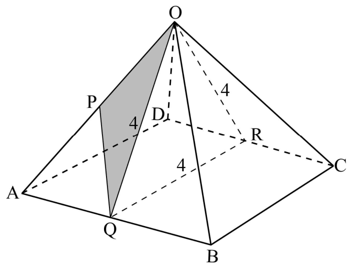
$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A^C\cap B)$

$=0.8-0.56=0.24$

따라서 $\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{0.24}{0.4}=\frac{3}{5}$

14. [출제의도] 정사영 이해하기

선분 CD의 중점을 R라 하자.



두 평면 OAB, OCD가 이루는 예각 θ는

$\theta=\angle\mathrm{QOR}$이다.

$\overline{\mathrm{OQ}}=\overline{\mathrm{OR}}=\overline{\mathrm{QR}}=4$이므로

삼각형 QOR는 정삼각형이다.

그러므로 $\cos\theta=\frac{1}{2}$

점 P는 선분 OA의 중점이므로

삼각형 OPQ의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\times(\text{삼각형 OAQ의 넓이})=\frac{1}{2}\times4=2$

삼각형 OPQ의 평면 OCD 위로의 정사영의 넓이를 S'라 하면

$S'=S\cos\theta=2\times\frac{1}{2}=1$

15. [출제의도] 정적분을 활용하여 문제해결하기

직선 $x=t\ (1\le t\le2)$를 포함하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(3t+\frac{2}{t}\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(9t^2+12+\frac{4}{t^2}\right)$

따라서 구하는 부피 V는

$$V=\int_1^2S(t)dt=\int_1^2\frac{\sqrt{3}}{4}\left(9t^2+12+\frac{4}{t^2}\right)dt$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left[3t^3+12t-\frac{4}{t}\right]_1^2=\frac{35\sqrt{3}}{4}$$

16. [출제의도] 역함수의 미분법 이해하기

$g(x)$가 함수 $f(x)$의 역함수이므로

$g(1)=t$라 하면 $f(t)=1$

$\tan^3t=1$에서 $\tan t=1$

$-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$에서 $t=\frac{\pi}{4}$

그러므로 $g(1)=\frac{\pi}{4}$

$f'(x)=3\tan^2x\sec^2x$

따라서 점 $(1,\ g(1))$에서의 접선의 기울기는

$g'(1)=\frac{1}{f'(g(1))}=\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{6}$

17. [출제의도] 미분법을 활용하여 함수의 성질 이해하기

함수 $f(x)$가 열린 구간 $(0,\ \infty)$에서 증가해야 하므로 $f'(x)=x-3+\frac{k}{x^2}\ge0$

$x^2>0$이므로 양변에 x^2을 곱하면

$k\ge-x^3+3x^2$

함수 $g(x)=-x^3+3x^2$이라 하면

열린 구간 $(0,\ \infty)$에서 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 극대이면서 최대이므로 최댓값은 4이다.

따라서 $k \ge 4$이므로 만족시키는 k의 최솟값은 4

18. [출제의도] 확률변수의 평균을 구하는 과정 추론하기

세 수 x_1, x_2, x_3을 순서쌍 (x_1, x_2, x_3)과 같이 나타내자.
x_1, x_2, x_3 중에서 최댓값을 p, 최솟값을 q, 나머지 수를 r, $p-q=k$ $(k=0, 1, \cdots, 5)$라 하면 순서쌍 (x_1, x_2, x_3)의 개수는 p, q, r를 일렬로 나열하는 방법의 수와 같다.

(1) $k=0$일 때
세 수가 모두 같으므로
순서쌍 (x_1, x_2, x_3)의 개수는 $\boxed{6}$이고,
$\mathrm{P}(X=0)=\dfrac{1}{6^3}\times\boxed{6}$

(2) $k \ne 0$일 때 $(1 \le k \le 5)$
순서쌍 (p, q)의 개수는 각각의 k에 대하여 $6-k$이고
i) $k=1$일 때
순서쌍 (x_1, x_2, x_3)의 개수는
$5\times\left(\dfrac{3!}{2!}+\dfrac{3!}{2!}\right)$
ii) $2 \le k \le 5$일 때
① $r=p$ 또는 $r=q$인 경우
p, p, q와 p, q, q를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $\dfrac{3!}{2!}+\dfrac{3!}{2!}$
② $r \ne p$이고 $r \ne q$인 경우
r의 개수는 각각의 k에 대하여 $k-1$이고
p, r, q를 일렬로 나열하는 방법의 수는
${}_3\mathrm{P}_3=3!$이므로 $(k-1)\times 3!$
①, ②에 의하여
순서쌍 (x_1, x_2, x_3)의 개수는
$(6-k)\times\left\{\dfrac{3!}{2!}+\dfrac{3!}{2!}+(k-1)\times 3!\right\}$
그러므로 $1 \le k \le 5$일 때,
순서쌍 (x_1, x_2, x_3)의 개수는
$(6-k)\times\left\{\dfrac{3!}{2!}+\dfrac{3!}{2!}+\left(\boxed{k-1}\right)\times 3!\right\}$

(예를 들어)
$k=3$인 경우
(p, r, q)는 $(4, r, 1)$, $(5, r, 2)$, $(6, r, 3)$이므로 개수는 3
(p, r, q)가 $(4, r, 1)$일 때
① $r=4$ 또는 $r=1$인 경우
4, 4, 1과 4, 1, 1을 일렬로 나열하는 방법의 수는 $\dfrac{3!}{2!}+\dfrac{3!}{2!}$
② $r \ne 4$이고 $r \ne 1$인 경우
r는 3 또는 2이므로 r의 개수는 2
p, r, q를 일렬로 나열하는 방법의 수는
${}_3\mathrm{P}_3=3!$이므로 $2\times 3!$
①, ②에 의하여
4, r, 1을 일렬로 나열하는 방법의 수는
$\dfrac{3!}{2!}+\dfrac{3!}{2!}+2\times 3!$
$(5, r, 2)$, $(6, r, 3)$일 때에도 같은 방법으로 구하면 각각 $\dfrac{3!}{2!}+\dfrac{3!}{2!}+2\times 3!$
그러므로 $k=3$인 경우
순서쌍 (x_1, x_2, x_3)의 개수는
$3\times\left(\dfrac{3!}{2!}+\dfrac{3!}{2!}+2\times 3!\right)$

그러므로
$\mathrm{P}(X=k)$
$=\dfrac{1}{6^3}\times(6-k)\times\left\{\dfrac{3!}{2!}+\dfrac{3!}{2!}+\left(\boxed{k-1}\right)\times 3!\right\}$
(1), (2)에 의하여 확률변수 X의 평균 $\mathrm{E}(X)$는 다음과 같다.
$\mathrm{E}(X)=\displaystyle\sum_{k=0}^{5}\{k\times\mathrm{P}(X=k)\}$
$=\dfrac{1}{6^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{5}\left(\boxed{6k^2-k^3}\right)=\dfrac{35}{12}$

$a=6$, $f(k)=k-1$, $g(k)=6k^2-k^3$
따라서 $\dfrac{f(5)\times g(3)}{a}=\dfrac{4\times 27}{6}=18$

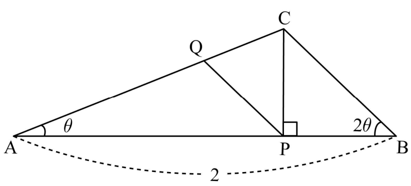
19. [출제의도] 평면운동의 성질 추론하기

점 P의 속도 $\vec{v}$는 $\vec{v}=(1-2\sin t,\ \sqrt{3}\cos t)$
ㄱ. $t=\dfrac{\pi}{2}$일 때, 점 P의 속도는 $(-1,\ 0)$이다.(참)
ㄴ. 속도의 크기 $|\vec{v}|$는
$|\vec{v}|=\sqrt{\sin^2 t-4\sin t+4}=\sqrt{(\sin t-2)^2}$
$=|\sin t-2|=2-\sin t$
$t=\dfrac{\pi}{2}$일 때, $|\vec{v}|$의 최솟값은 1이다.(참)
ㄷ. 점 P가 $t=\pi$에서 $t=2\pi$까지 움직인 거리는
$\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi}|\vec{v}|dt=\int_{\pi}^{2\pi}(2-\sin t)dt$
$=[2t+\cos t]_{\pi}^{2\pi}=2\pi+2$(참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

20. [출제의도] 정적분으로 나타내어진 함수 추론하기

$g'(x)=\dfrac{x}{f(x)}$, $g'(-x)=-g'(x)$이므로
$f(-x)=f(x)$이다.
$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로
$f(x)=x^2+k$ (단, k는 상수이다.)
점 $(1,\ g(1))$은 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이므로
$g''(x)=\dfrac{f(x)-xf'(x)}{\{f(x)\}^2}$
$g''(1)=\dfrac{f(1)-f'(1)}{\{f(1)\}^2}=\dfrac{1+k-2}{(1+k)^2}=0$
$k=1$이므로 $f(x)=x^2+1$
따라서 $g(1)=\displaystyle\int_0^1\frac{t}{t^2+1}dt$
$=\dfrac{1}{2}\left[\ln(t^2+1)\right]_0^1=\dfrac{1}{2}\ln 2$

21. [출제의도] 함수의 극한을 활용하여 문제해결하기



선분 AC가 원의 지름이므로 $\angle\mathrm{APC}=\dfrac{\pi}{2}$이다.
$\overline{\mathrm{AP}}=a$, $\overline{\mathrm{AQ}}=b$라 하자.
두 삼각형 APC와 CPB는 직각삼각형이므로
$a\tan\theta=\overline{\mathrm{CP}}=(2-a)\tan 2\theta$
$a=\dfrac{2\tan 2\theta}{\tan\theta+\tan 2\theta}$
삼각형 ABC와 삼각형 APQ는 닮음이므로
$\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AQ}}:\overline{\mathrm{AC}}$
$a:2=b:a\sec\theta$
$b=\dfrac{1}{2}a^2\sec\theta$
삼각형 APQ의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때,
$S(\theta)=\dfrac{1}{2}\times a\times\dfrac{1}{2}a^2\sec\theta\times\sin\theta$
$=\dfrac{1}{4}\times a^3\times\tan\theta$
$=\dfrac{1}{4}\times\left(\dfrac{2\tan 2\theta}{\tan\theta+\tan 2\theta}\right)^3\times\tan\theta$
따라서
$\displaystyle\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta}$
$=\displaystyle\lim_{\theta\to 0+}\left\{\frac{1}{4}\times\left(\frac{\frac{2\tan 2\theta}{2\theta}\times 2}{\frac{\tan\theta}{\theta}+\frac{\tan 2\theta}{2\theta}\times 2}\right)^3\times\frac{\tan\theta}{\theta}\right\}=\frac{16}{27}$

22. [출제의도] 지수방정식 계산하기

$\left(\dfrac{1}{5}\right)^{5-x}=5^{x-5}=5^2$
따라서 $x=7$

23. [출제의도] 중복조합 계산하기

${}_3\mathrm{H}_n={}_{n+2}\mathrm{C}_n={}_{n+2}\mathrm{C}_2=\dfrac{(n+2)(n+1)}{2}$이므로
$n^2+3n-40=0$
$(n-5)(n+8)=0$
n이 자연수이므로 $n=5$

24. [출제의도] 로그함수의 그래프 이해하기

점근선이 $x=5$이므로 $a=5$
$f(11)=\log_6(11-5)+b=9$이므로 $b=8$
따라서 $a+b=13$

25. [출제의도] 합성함수의 미분법 이해하기

두 함수 $f(x)=kx^2-2x$, $g(x)=e^{3x}+1$에서
$f'(x)=2kx-2$, $g'(x)=3e^{3x}$
$f'(2)=4k-2$, $g(0)=2$, $g'(0)=3$
함수 $h(x)=(f\circ g)(x)$에서
$h'(x)=f'(g(x))g'(x)$
$h'(0)=f'(g(0))g'(0)=f'(2)\times 3$
$=(4k-2)\times 3=42$
따라서 $k=4$

26. [출제의도] 집합의 분할을 활용하여 문제해결하기

서로 다른 종류의 인형 5개를 3개의 가방 A, B, C에 적어도 1개 이상 넣는 방법은 다음과 같다.
(i) 3개, 1개, 1개로 나누어 넣는 경우

$\left({}_5\mathrm{C}_3 \times {}_2\mathrm{C}_1 \times {}_1\mathrm{C}_1 \times \frac{1}{2!}\right) \times 3! = 60$

(ii) 2개, 2개, 1개로 나누어 넣는 경우

$\left({}_5\mathrm{C}_2 \times {}_3\mathrm{C}_2 \times {}_1\mathrm{C}_1 \times \frac{1}{2!}\right) \times 3! = 90$

따라서 (i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는
$60 + 90 = 150$

27. [출제의도] 여러 가지 함수의 정적분을 활용하여 문제해결하기

$\int_0^1 tf(t)dt = a$라 하면 $f(x) = e^x + a$

$a = \int_0^1 t(e^t + a)dt$에서

$u'(t) = e^t + a$, $v(t) = t$라 하면

$u(t) = e^t + at$, $v'(t) = 1$이므로

$a = \int_0^1 t(e^t + a)dt$

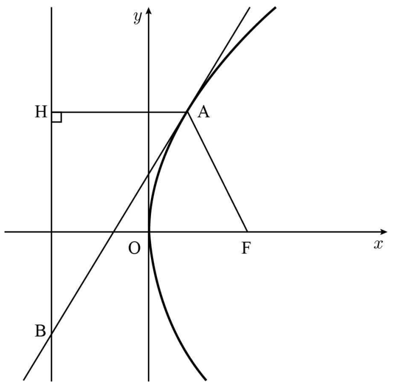
$= \left[t(e^t + at)\right]_0^1 - \int_0^1 (e^t + at)dt$

$= e + a - \left[e^t + \frac{1}{2}at^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}a + 1$

$a = 2$이므로 $f(x) = e^x + 2$

따라서 $f(\ln 10) = 12$

28. [출제의도] 포물선의 정의를 활용하여 문제해결하기



점 A의 좌표를 (x_1, y_1), 점 A에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\overline{\mathrm{AB}} = 2\overline{\mathrm{AF}}$, $\overline{\mathrm{AF}} = \overline{\mathrm{AH}}$이므로 $\overline{\mathrm{AH}} : \overline{\mathrm{AB}} = 1:2$

점 A에서의 접선의 기울기는 $\frac{\overline{\mathrm{BH}}}{\overline{\mathrm{AH}}} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

$y^2 = 12x$에서 $2y\frac{dy}{dx} = 12$

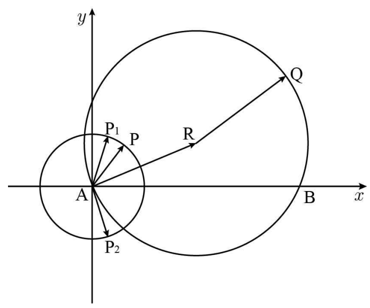
$\frac{dy}{dx} = \frac{6}{y}$이므로 $\frac{6}{y_1} = \sqrt{3}$

그러므로 $\mathrm{A}(1,\ 2\sqrt{3})$이다.

$\overline{\mathrm{AF}} = x_1 + 3 = 4$, $\overline{\mathrm{AB}} = 2\overline{\mathrm{AF}} = 8$

따라서 $\overline{\mathrm{AB}} \times \overline{\mathrm{AF}} = 32$

29. [출제의도] 평면벡터의 내적을 활용하여 문제해결하기



그림과 같이 좌표평면 위의 점 A를 $\mathrm{A}(0,\ 0)$, 점 B를 $\mathrm{B}(24,\ 0)$, 원 C의 중심을 $\mathrm{R}(12,\ 5)$라 하자.

$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{AR}} + \overrightarrow{\mathrm{RQ}})$

$= \overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AR}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{RQ}}$

$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}| = 5$, $|\overrightarrow{\mathrm{AR}}| = 13$, $|\overrightarrow{\mathrm{RQ}}| = 13$이다.

$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AR}}$가 최대인 경우를 구하면

(i) $\cos\theta = 1$일 때,

점 P가 선분 AB위에 있으므로

$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AR}} = |\overrightarrow{\mathrm{AP}}| \times |\overrightarrow{\mathrm{AR}}| \times \cos(\angle \mathrm{PAR})$

$= 5 \times 13 \times \frac{12}{13} = 60$

(ii) $0 < \cos\theta < 1$일 때,

$\angle \mathrm{P_1AB} = \angle \mathrm{P_2AB} = \theta$인 제1사분면 위의 점을 $\mathrm{P_1}$, 제4사분면 위의 점을 $\mathrm{P_2}$라 하자.

$\angle \mathrm{P_1AR} < \angle \mathrm{P_2AR}$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{AP_1}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AR}} > \overrightarrow{\mathrm{AP_2}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AR}}$

그러므로 제1사분면 위의 점 P만 고려하면 된다.

$\angle \mathrm{RAP} = \alpha$, $\angle \mathrm{RAB} = \beta$라 하면

$\cos\beta = \frac{12}{13}$이고, $5\cos\theta$가 자연수이므로

$\cos\beta > \cos\theta$

따라서 $\beta < \theta$이고 $\cos\theta$의 값이 $\frac{4}{5}$일 때,

$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AR}}$가 최댓값을 갖는다.

$\alpha = \theta - \beta$이므로

$\cos\alpha = \cos(\theta - \beta) = \cos\theta\cos\beta + \sin\theta\sin\beta$

$= \frac{4}{5} \times \frac{12}{13} + \frac{3}{5} \times \frac{5}{13} = \frac{63}{65}$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AR}} = |\overrightarrow{\mathrm{AP}}| \times |\overrightarrow{\mathrm{AR}}| \times \cos\alpha$

$= 5 \times 13 \times \frac{63}{65} = 63$

(i), (ii)에 의하여 $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AR}}$가 최대가 되는 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{RQ}}$가 같은 방향일 때, $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{RQ}}$의 값이 최대이므로 $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{RQ}}$의 최댓값은 65이다. 그러므로

$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AR}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{RQ}}$

$\leq 63 + 65 = 128$

따라서 $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AQ}}$의 최댓값은 128

30. [출제의도] 미분을 활용하여 함수 추론하기

$f(x) = a(x-m)^2 + n$이라 하자.

$f'(x) = 2a(x-m)$이고 $f''(x) = 2a$이다.

두 곡선 $y = f(x)$와 $y = |f'(x)|$는 각각 직선 $x = m$에 대하여 대칭이므로

함수 $g(x) = |f'(x)|e^{f(x)}$의 그래프도 직선 $x = m$에 대하여 대칭이다.

(i) $x > m$인 경우

$a > 0$이면 함수 $y = f'(x)e^{f(x)}$는 실수 전체에서 증가하므로 함수 $g(x)$의 최댓값이 존재하지 않는다.

그러므로 조건 (나)에 의하여 $a < 0$이다.

$g'(x) = -\left(f'(x)e^{f(x)}\right)'$

$= -\left[f''(x) + \{f'(x)\}^2\right]e^{f(x)}$

$= \left\{-4a^2(x-m)^2 - 2a\right\}e^{f(x)}$

방정식 $g'(x) = 0$을 만족하는 x는 한 개이고 그 값을 $p\ (p > m)$이라 하자.

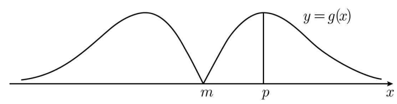
함수 $g(x)$는 $x = p$에서 극댓값을 갖고, 그 값이 최댓값이다.

(ii) $x < m$인 경우

함수 $y = g(x)$의 그래프는 직선 $x = m$에 대하여 대칭이므로

함수 $g(x)$는 $x = 2m - p$에서 극댓값을 갖고, 그 값이 최댓값이다.

(i), (ii)에 의하여 함수 $y = g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$g(m) = 0$이고, 함수 $g(x)$는 $x = 2$에서 극솟값을 가지므로 $m = 2$이다.

함수 $g(x)$는 $x = p$에서 최댓값이 $4\sqrt{e}$이므로

$g(p) = |f'(p)|e^{f(p)} = 4\sqrt{e}$이다.

상수항을 포함한 모든 항의 계수가 유리수이므로

$f'(p) = 2a(p-2) = -4$ …… ㉠

$f(p) = a(p-2)^2 + n = \frac{1}{2}$ …… ㉡

또한 함수 $g(x)$는 $x = p$에서 극댓값을 가지므로

$g'(p) = 0$에서 $2a(p-2)^2 + 1 = 0$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에 의하여 $n = 1$, $p = \frac{9}{4}$이므로

$a = -8$

$f(x) = a(x-m)^2 + n = -8(x-2)^2 + 1$

따라서 $|f(-1)| = 71$