01 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분

1 여러 가지 적분법

함수 $y=x^r$ (r는 실수)의 부정적분과 정적분

1) $r\neq-1$일 때, $\int x^r dx=\frac{1}{r+1}x^{r+1}+C$

2) $r=-1$일 때, $\int x^{-1}dx=\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$

▷ $r\neq-1$일 때, 미분법에서 $\left(\frac{1}{r+1}x^{r+1}\right)'=x^r$이므로 $\int x^r dx=\frac{1}{r+1}x^{r+1}+C$이다.

▷ $(\ln|x|)'=\frac{1}{x}=x^{-1}$ 이므로 $\int x^{-1}dx=\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$ 이다.

다음 부정적분을 구하시오.

(1) $\int\frac{x^2+3x}{x^3}dx$ (2) $\int(2\sqrt{x}-1)^2dx$

(1) $\int\frac{x^2+3x}{x^3}dx=\int\frac{1}{x}dx+\int\frac{3}{x^2}dx=\int x^{-1}dx+3\int x^{-2}dx$

$=\ln|x|-\frac{3}{x}+C$

(2) $\int(2\sqrt{x}-1)^2dx=\int 4xdx-4\int\sqrt{x}\,dx+\int 1dx$

$=4\int xdx-4\int x^{\frac{1}{2}}dx+\int 1dx$

$=2x^2-\frac{8}{3}x\sqrt{x}+x+C$

다음 정적분의 값을 구하시오.

(1) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2+3x}{x^3}dx$ (2) $\displaystyle\int_0^1 (2\sqrt{x}-1)^2 dx$

(1) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2+3x}{x^3}dx = \left[\ln|x| - \frac{3}{x}\right]_1^2 = \ln 2 - \frac{3}{2} - \ln 1 + 3$

$\displaystyle= \ln 2 + \frac{3}{2}$

(2) $\displaystyle\int_0^1 (2\sqrt{x}-1)^2 dx = \left[2x^2 - \frac{8}{3}x\sqrt{x} + x\right]_0^1 = 2 - \frac{8}{3} + 1$

$\displaystyle= \frac{1}{3}$

지수함수의 부정적분과 정적분

1) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ (단, $a > 0$, $a \neq 1$)

2) $\int e^x dx = e^x + C$

▷ $a > 0$, $a \neq 1$일 때, 지수함수의 미분법에서 $(a^x)' = a^x \ln a$, 즉 $\left(\frac{a^x}{\ln a}\right)' = a^x$이므로

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

▷ $(e^x)' = e^x$에서 $\int e^x dx = e^x + C$

다음 부정적분을 구하시오.

(1) $\int 5^{2x} dx$ (2) $\int e^{x-1} dx$

(1) $\int 5^{2x} dx = \int 25^x dx = \frac{25^x}{\ln 25} + C = \frac{5^{2x}}{2\ln 5} + C$

(2) $\int e^{x-1} dx = \int \frac{1}{e} e^x dx = \frac{1}{e} \int e^x dx = \frac{1}{e} e^x + C = e^{x-1} + C$

다음 정적분의 값을 구하시오.

(1) $\int_0^1 5^{2x} dx$ (2) $\int_1^3 e^{x-1} dx$

(1) $\int_0^1 5^{2x} dx = \left[\frac{5^{2x}}{2\ln 5}\right]_0^1 = \frac{25}{2\ln 5} - \frac{1}{2\ln 5} = \frac{24}{2\ln 5} = \frac{12}{\ln 5}$

(2) $\int_1^3 e^{x-1} dx = \left[e^{x-1}\right]_1^3 = e^2 - 1$

삼각함수의 부정적분과 정적분

1) $\int \sin x dx = -\cos x + C$

2) $\int \cos x dx = \sin x + C$

3) $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$

4) $\int \csc^2 x\, dx = -\cot x + C$

▷ 삼각함수의 미분법에서 $(-\cos x)' = \sin x$, $(\sin x)' = \cos x$이므로

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C$$

▷ 마찬가지로, $(\tan x)' = \sec^2 x$, $(-\cot x)' = \csc^2 x$이므로

$$\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$$

$$\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$$

다음 부정적분을 구하시오.

(1) $\int (\cos x - 3\sec^2 x) dx$

(2) $\int \cot^2 x dx$

(1) $\int (\cos x - 3\sec^2 x) dx = \int \cos x\, dx - 3\int \sec^2 x\, dx$

$= \sin x - 3\tan x + C$

(2) $\int \cot^2 x dx = \int \csc^2 x - 1 dx = \int \csc^2 x dx - \int 1 dx$

$= -\cot x - x + C$

다음 정적분의 값을 구하시오.

(1) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}(\cos x-3\sec^2 x)dx$ (2) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\cot^2 x dx$

(1) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}(\cos x-3\sec^2 x)dx=\Big[\sin x-3\tan x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}+3-\frac{\sqrt{2}}{2}+3=6$

(2) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\cot^2 x dx=\Big[-\cot x-x\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{3}+\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}$

$=\frac{2}{3}\sqrt{3}-\frac{\pi}{6}$

02 치환적분법

치환적분법을 이용한 부정적분

미분가능한 함수 $g(x)$에 대하여 $g(x)=t$로 놓으면

$$\int f(g(x))g'(x)dx=\int f(t)dt$$

▷ 함수 $f(x)$의 부정적분을 $F(x)$라고 할 때, 합성함수 $F(g(x))$를 미분하면

$$\frac{d}{dx}F(g(x))=F'(g(x))g'(x)=f(g(x))g'(x)$$

이다. 따라서

$$\int f(g(x))g'(x)dx=F(g(x))+C$$

이다. 이때, $g(x)=t$로 놓으면 $F(g(x))=F(t)$이고, $\int f(t)dt=F(t)+C$이므로

$$\int f(g(x))g'(x)dx=\int f(t)dt$$

이다. 이와 같이 한 변수에 대해 미분가능한 함수를 다른 변수로 치환하여 적분하는 방법을 치환적분법이라고 한다.

다음 부정적분을 구하시오.

(1) $\int 2\sin(2x+1)dx$　　　(2) $\int 2x(x^2+1)^2dx$

(1) $2x+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2$이므로

$$\int 2\sin(2x+1)dx=\int \sin t dt=-\cos t+C=-\cos(2x+1)+C$$

(2) $x^2+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x$이므로

$$\int 2x(x^2+1)^2dx=\int t^2dx=\frac{1}{3}t^3+C=\frac{1}{3}(x^2+1)^3+C$$

다음 부정적분을 구하시오.

(1) $\int e^{3x}dx$ (2) $\int \frac{1}{4x+3}dx$

(1) $3x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=3$이므로

$$\int e^{3x}dx=\int e^t \times \frac{1}{3}dt=\frac{1}{3}\int e^t dt=\frac{1}{3}e^t+C=\frac{1}{3}e^{3x}+C$$

(2) $4x+3=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=4$이므로

$$\int \frac{1}{4x+3}dx=\int \frac{1}{t}\times\frac{1}{4}dt=\frac{1}{4}\int \frac{1}{t}dt=\frac{1}{4}\ln|t|+C=\frac{1}{4}\ln|4x+3|+C$$

함수 $\frac{f'(x)}{f(x)}$의 부정적분

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C$$

▷ $f(x)=t$라고 하면 $\frac{dt}{dx}=f'(x)$ 이므로

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int \frac{1}{f(x)}\times f'(x)dx=\int \frac{1}{t}dt=\ln|t|+C=\ln|f(x)|+C$$

부정적분 $\int \tan x\, dx$를 구하시오.

$$\int \tan x dx=\int \frac{\sin x}{\cos x}dx=\int \frac{-(\cos x)'}{\cos x}dx=-\int \frac{(\cos x)'}{\cos x}dx$$

$$=-\ln|\cos x|+C$$

치환적분법을 이용한 정적분

미분가능한 함수 $g(x)$의 도함수 $g'(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고
$g(a)=\alpha,\ g(b)=\beta$에 대하여 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[\alpha,\ \beta]$에서 연속일 때

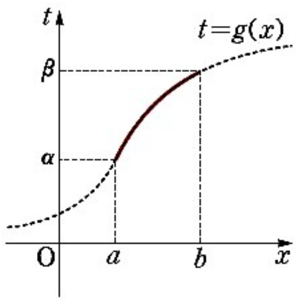
$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_\alpha^\beta f(t)dt$$

▷ 미분가능한 함수 $g(x)$의 도함수 $g'(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속이고, 함수 $f(x)$가 함수 $g(x)$의 치역을 포함하는 구간에서 연속일 때, $f(x)$의 부정적분 중의 하나를 $F(x)$라고 하면

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C$$

이다. 이때, $g(a)=\alpha,\ g(b)=\beta$로 놓으면

$$\begin{aligned}\int_a^b f(g(x))g'(x)dx &= \Big[F(g(x))\Big]_a^b \\ &= F(g(b)) - F(g(a)) \\ &= F(\beta) - F(\alpha) \\ &= \int_\alpha^\beta f(t)dt\end{aligned}$$



다음 정적분의 값을 구하시오.

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x dx$ (2) $\displaystyle\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x} dx$

(1) $t=\cos x$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx} = -\sin x$

$x=0$일 때 $t=1$, $x=\dfrac{\pi}{2}$일 때, $t=0$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x dx = \int_1^0 t^2(-dt) = \left[-\frac{1}{3}t^3\right]_1^0 = \frac{1}{3}$$

(2) $t=\ln x$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{x}$

$x=1$일 때 $t=0$, $x=e$일 때, $t=1$이므로

$$\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \int_0^1 t^2 dt = \left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

03 부분적분법

부분적분법을 이용한 부정적분

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

▷ 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 각각 연속인 도함수를 가질 때 곱의 미분법에서

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

이므로

$$f(x)g'(x) = \{f(x)g(x)\}' - f'(x)g(x)$$

이다. 이 등식의 양변을 x에 대하여 적분하면

$$\begin{aligned}\int f(x)g'(x)dx &= \int \{f(x)g(x)\}' - f'(x)g(x)dx \\ &= \int \{f(x)g(x)\}'dx - \int f'(x)g(x)dx \\ &= f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx\end{aligned}$$

이와 같이 적분하는 방법을 부분적분법이라고 한다.

▷ 부분적분에서 $f(x)$, $g'(x)$ 를 결정하는 방법

지수함수 → 삼각함수 → 다항함수 → 로그함수

순으로 앞쪽의 것을 $g'(x)$로 뒤에 것을 $f(x)$로 놓는다.

다음 부정적분을 구하시오.

(1) $\int xe^x dx$ (2) $\int x^2 \sin x\, dx$ (3) $\int \ln x\, dx$

(1) $f(x)=x,\ g'(x)=e^x$ 로 놓으면 $f'(x)=1,\ g(x)=e^x$

$$\therefore \int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

(2) $f(x)=x^2,\ g'(x)=\sin x$ 로 놓으면 $f'(x)=2x,\ g(x)=-\cos x$

$$\begin{aligned}\therefore \int x^2 \sin x\, dx &= x^2 \times (-\cos x) - \int 2x \times (-\cos x) dx \\ &= -x^2 \cos x + 2\int x \cos x dx \\ &= -x^2 \cos x + 2\left\{x \times \sin x - \int \sin x\, dx\right\} \\ &= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + C\end{aligned}$$

(3) $f(x)=\ln x,\ g'(x)=1$ 로 놓으면 $f'(x)=\frac{1}{x},\ g(x)=x$

$$\begin{aligned}\therefore \int \ln x\, dx &= \int 1 \times \ln x\, dx = x \ln x - \int x \times \frac{1}{x} dx \\ &= x \ln x - x + C\end{aligned}$$

부분적분법을 이용한 정적분

닫힌구간 $[a,\ b]$에서 두 함수 $f(x),\ g(x)$가 미분가능하고 $f'(x),\ g'(x)$가 연속일 때

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

▷ 구간 $[a, b]$에서 두 함수 $f(x), g(x)$가 각각 연속인 도함수를 가질 때 곱의 미분법에서

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

이므로

$$\int_a^b \{f(x)g(x)\}'dx = \int_a^b f'(x)g(x) + f(x)g'(x)dx$$

$$= \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

이때 $\displaystyle\int_a^b \{f(x)g(x)\}'dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b$ 이므로

$$\Big[f(x)g(x)\Big]_a^b = \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

즉,

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

임을 알 수 있다.

정적분 $\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}} x\ln x\,dx$의 값을 구하시오.

$f(x) = \ln x,\ g'(x) = x$로 놓으면 $f'(x) = \dfrac{1}{x},\ g(x) = \dfrac{1}{2}x^2$

$$\therefore \int_1^{\sqrt{e}} x\ln x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_1^{\sqrt{e}} - \int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x}\times\frac{1}{2}x^2dx$$

$$= \frac{e}{4} - \int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{2}x\,dx = \frac{e}{4} - \left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^{\sqrt{e}} = \frac{1}{4}$$

01 정적분과 급수의 합 사이의 관계

구분구적법

1) 어떤 도형의 넓이나 부피를 구할 때, 넓이 또는 부피를 알고 있는 기본 도형으로 주어진 도형을 세분하여 근사값을 구하고, 이 근사값의 극한값으로 그 도형의 넓이와 부피를 구하는 방법을 구분구적법이라 한다.

2) 구분구적법의 계산
- 주어진 도형을 n등분하여 기본 도형으로 만든다.
- 기본 도형들의 넓이(부피)의 합을 구한다.
- 위에서 구한 합의 극한값을 구한다.

$y=x^2$, x축, 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이를 구분구적법을 이용하여 구하시오.

구간 $[0, 1]$을 n등분하면 각 분점의 x좌표는

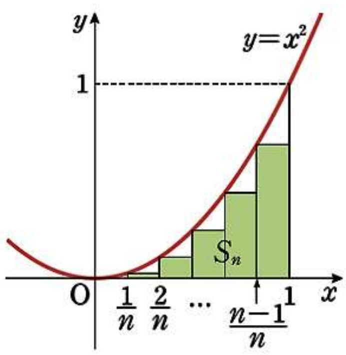
왼쪽으로부터 $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}$이다.

n등분한 각 구간의 왼쪽 끝점의 함숫값을 높이로 하는 직사각형을 만들면, 분점 사이의 거리는 $\frac{1}{n}$이므로

이들의 넓이는 각각

$$\left(\frac{0}{n}\right)^2 \times \frac{1}{n},\quad \left(\frac{1}{n}\right)^2 \times \frac{1}{n},\quad \cdots,\quad \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \times \frac{1}{n}$$

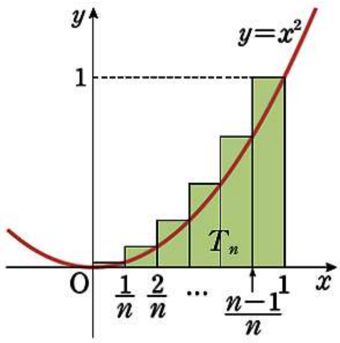
이다.



이들의 넓이의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \frac{1}{n}\left(\frac{0}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2$$
$$= \frac{1}{n^3}\{1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2\}$$
$$= \frac{1}{n^3} \times \frac{(n-1) \times n \times (2n-1)}{6}$$
$$= \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right)$$

구간 $[0, 1]$을 n 등분한 구간의 오른쪽 끝점의 함숫값을 높이로 하는 직사각형을 만들어 이들의 넓이의 합을 T_n이라 하면



$$T_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2$$
$$= \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2)$$
$$= \frac{1}{n^3} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$= \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)$$

구하는 넓이를 S라고 하면 $S_n < S < T_n$이 성립하므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n \leq S \leq \lim_{n\to\infty} T_n$$

$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} T_n = \frac{1}{3}$이므로 $S = \frac{1}{3}$이 된다.

정적분과 급수의 합 사이의 관계

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$를 포함하는 열린구간에서 연속일 때

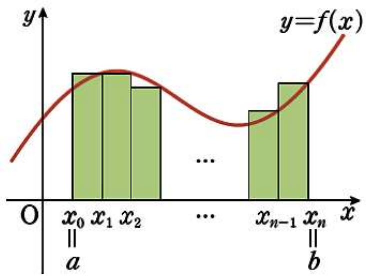
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x = \int_a^b f(x)dx \quad \left(\text{단, } \Delta x = \frac{b-a}{n},\ x_k = a + k\Delta x\right)$$

▷ 닫힌구간 $[a,\ b]$를 n 등분한 각 분점의 x좌표를 각각

$$a = x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots x_{n-1},\ x_n = b$$

라고 하면 등분된 각 소구간의 길이 Δx는

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$



이고, $x_k = a + k\Delta x$ $(k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$이 된다.
이때, 각 소구간의 길이를 밑변으로 하고, 각 소구간의 오른쪽 끝점에서의 함숫값을 높이로 하는 직사각형들의 넓이의 합을 S_n이라고 하면

$$\begin{aligned} S_n &= f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots f(x_k)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x \\ &= \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x \end{aligned}$$

이때 n이 한없이 커지면 S_n의 값은 곡선 $y = f(x)$와 x축 및 두 직선 $x = a,\ x = b$로 둘러싸인 도형의 넓이에 한없이 가까워짐을 알 수 있다. 즉,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x = \int_a^b f(x)dx$$

가 성립한다.

▷ 위 식은 다음 두 가지 경우에도 성립한다.

① 각 소구간의 길이를 밑변으로 하고, 각 소구간의 왼쪽 끝점에서의 함숫값을 높이로 하는 직사각형들의 넓이의 합을 S_n이라 할 때도 성립한다.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\Delta x$$

② $f(x)$의 부호에 관계없이 성립한다.

$f(x) = x^2 + 2x$일 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(3 + \frac{2k}{n}\right)$의 값을 구하시오.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(3 + \frac{2k}{n}\right) = \int_3^5 (x^2 + 2x)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2\right]_3^5$$

$$= \left(\frac{125}{3} + 25\right) - (9 + 9) = \frac{146}{3}$$

정적분을 이용하여 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} + \cdots + \sqrt{n+n})$의 값을 구하시오.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} + \cdots + \sqrt{n+n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{n+k}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \frac{k}{n}}$$

$$= \int_1^2 \sqrt{x}\,dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^2$$

$$= \frac{4\sqrt{2} - 2}{3}$$

02 도형의 넓이

곡선과 x축 사이의 넓이

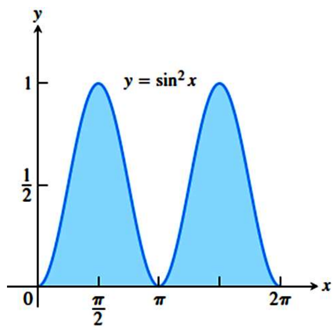
함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는 다음과 같다.

$$S=\int_a^b |f(x)|dx$$

구간 $[0, 2\pi]$에서 곡선 $y=\sin^2 x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

곡선 $y=\sin^2 x$와 x축으로 둘러싸인 영역은 오른쪽 그래프에서 보는 바와 같다. 구하는 영역의 넓이를 S라고 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2x}{2} dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{2\pi} \\ &= \left(\frac{2\pi}{2} - \frac{\sin 4\pi}{4}\right) - \left(\frac{0}{2} - \frac{\sin 0}{4}\right) = \pi \end{aligned}$$



곡선과 y축 사이의 넓이

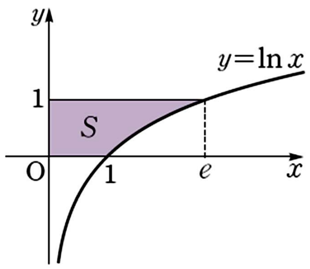
함수 $x=g(y)$가 y축 위의 닫힌구간 $[c,\ d]$에서 연속일 때, 곡선 $x=g(y)$와 y축 및 두 직선 $y=c$, $y=d$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는 다음과 같다.

$$S=\int_c^d |g(y)|\,dy$$

곡선 $y=\ln x$와 y축 및 두 직선 $y=0$과 $y=1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

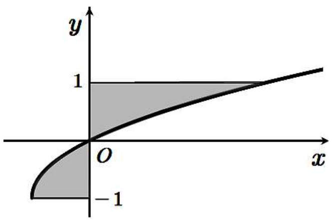
구하는 영역은 오른쪽 그래프에서 보는 바와 같다.
$y=\ln x$에서 $x=e^y$이므로 구하는 넓이 S는

$$S=\int_0^1 e^y\,dy=\left[e^y\right]_0^1=e-1$$



곡선 $y=\sqrt{x+1}-1$과 y축 및 $y=-1$, $y=1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

곡선 $y=\sqrt{x+1}-1$과 y축 및 $y=-1$, $y=1$로 둘러싸인 영역은 오른쪽 그래프에서 보는 바와 같다.
$y=\sqrt{x+1}-1$로부터 $x=(y+1)^2-1$이 되므로 구하는 영역의 넓이를 S라고 하면



$$\begin{aligned}S&=\int_{-1}^1 |(y+1)^2-1|\,dy\\&=\int_{-1}^0 \{1-(y+1)^2\}dy+\int_0^1 \{(y+1)^2-1\}dy\\&=\left[y-\frac{1}{3}(y+1)^3\right]_{-1}^0+\left[\frac{1}{3}(y+1)^3-y\right]_0^1\\&=\left(-\frac{1}{3}+1\right)+\left(\frac{8}{3}-1-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=2\end{aligned}$$

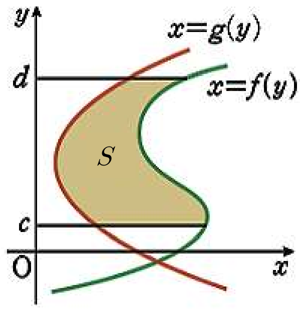
두 곡선 사이의 넓이

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는 다음과 같다.

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$

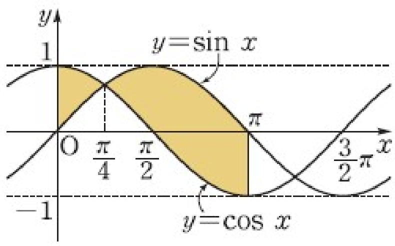
▷ 두 함수 $x=f(y)$, $x=g(y)$가 y축 위의 닫힌구간 $[c, d]$에서 연속일 때, 두 곡선 $x=f(y)$, $x=g(y)$ 및 두 직선 $y=c$, $y=d$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는 다음과 같다.

$$S=\int_c^d |f(y)-g(y)|dy$$



두 곡선 $y=\sin x$, $y=\cos x$ 및 두 직선 $x=0$, $x=\pi$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

오른쪽 그림에서와 같이 구간 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$에서는 $\sin x \le \cos x$이고, 구간 $\left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$에서는 $\sin x \ge \cos x$이므로 구하는 넓이 S는



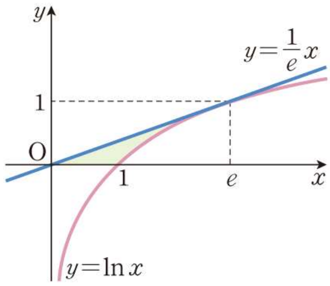
$$S=\int_0^\pi |\sin x-\cos x|dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(-\sin x+\cos x)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}(\sin x-\cos x)dx$$

$$=\Big[\cos x+\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}+\Big[-\cos x-\sin x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}=2\sqrt{2}$$

곡선 $y=\ln x$와 점 $(e,\ 1)$에서 이 곡선에 그은 접선 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

점 $(e,\ 1)$에서 곡선 $y=\ln x$에 접하는 접선의 방정식은 $y=\frac{1}{e}x$이므로 넓이를 구해야 하는 영역은 오른쪽 그림에서와 같이 곡선 $x=e^y$과 x축 및 직선 $x=ey$로 둘러싸인 부분이 된다.



$0\le y\le 1$일 때, $e^y\ge ey$이므로 구하는 넓이 S는

$$S=\int_0^1 (e^y-ey)\,dy$$

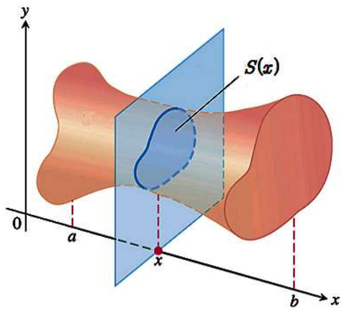
$$=\left[e^y-\frac{e}{2}y^2\right]_0^1=\frac{e}{2}-1$$

03 입체도형의 부피

입체도형의 부피

구간 $[a, b]$의 임의의 점 x에서 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이가 $S(x)$인 입체의 부피 V는 다음과 같다.
(단, $S(x)$는 구간 $[a,\ b]$에서 연속인 경우만 생각한다.)

$$V = \int_a^b S(x)dx$$



▷ 오른쪽 그림과 같이 x축 위의 구간 $[a,\ b]$를 n등분하여 양 끝점과 분점을 차례로

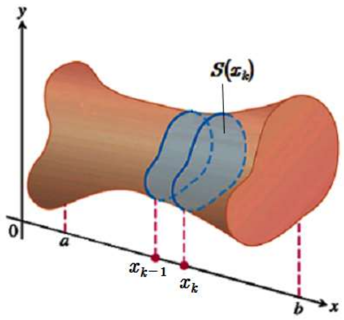
$$x_0(=a),\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1},\ x_n(=b)$$

이라 하고, 소구간의 길이를 Δx라 하자.
또, 좌표가 x_k인 점을 지나 x축에 수직인 평면으로 잘랐을 때 생기는 단면의 넓이를 $S(x_k)$라 하면 밑면의 넓이가 $S(x_k)$이고 높이가 $\Delta x = x_k - x_{k-1}$인 k번째 기둥의 부피는 $S(x_k)\Delta x$이므로 n개 기둥의 부피의 합 V_n은

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} S(x_k)\Delta x$$

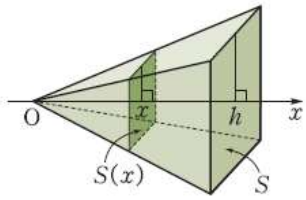
따라서, 구하는 입체의 부피 V는

$$V = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} S(x_k)\Delta x = \int_a^b S(x)dx$$



정적분을 이용하여 밑면의 넓이가 S이고 높이가 h인 정사각뿔의 부피를 구하시오.

오른쪽 그림과 같이 사각뿔의 꼭짓점 O를 원점, 꼭짓점에서 밑면에 내린 수선을 x축으로 정하자. x좌표가 x인 점을 지나고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(x)$라고 하면

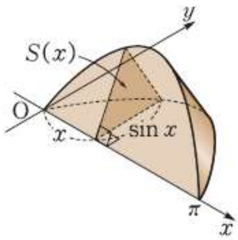


$$S(x) : S = x^2 : h^2,\ 즉\ S(x) = \frac{x^2}{h^2}S$$

따라서 구하는 부피 V는

$$V = \int_0^h S(x)\,dx = \int_0^h \frac{x^2}{h^2}S\,dx = \frac{S}{h^2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^h = \frac{1}{3}Sh$$

오른쪽 그림과 같이 곡선 $y = \sin x\ (0 \le x \le \pi)$와 x축으로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 모양이 정삼각형이 된다고 할 때, 이 입체도형의 부피를 구하시오.



그림에서처럼 점 $(x,\ 0)$에서 x축에 수직으로 자른 단면은 한 변의 길이가 $\sin x$인 정삼각형이 된다. 이 단면의 넓이를 $S(x)$라고 하면

$$S(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}\sin^2 x$$

따라서 구하는 부피 V는

$$V = \frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^\pi \sin^2 x\,dx = \frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^\pi \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}\,dx$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^\pi = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\sqrt{3}}{8}\pi$$

04 속도와 거리

수직선 위를 움직이는 점의 위치와 움직인 거리

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t)$라고 하면

1) 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P의 위치의 변화량은 $\int_a^b v(t)dt$

2) 시각 $t=a$에서의 점 P의 위치를 x_0라고 할 때, $t=b$에서의 점 P의 위치 x는

$$x=x_0+\int_a^b v(t)dt$$

3) 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리는 $\int_a^b |v(t)|dt$

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t)=\sin t-\sin 2t$이고, $t=0$일 때 $x=2$에서 출발한다고 할 때, 다음을 구하시오.

(1) 시각 $t=\pi$에서 점 P의 위치
(2) 시각 $t=0$부터 시각 $t=\pi$까지 점 P가 움직인 거리

(1) 시각 $t=0$에서 위치가 $x=2$이므로, 구하는 위치 x는

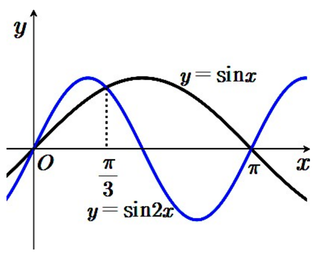
$$x=2+\int_0^\pi(\sin t-\sin 2t)dt=2+\left[-\cos t+\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^\pi=2+2=4$$

(2) $\int_0^\pi|\sin x-\sin 2x|dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sin 2x-\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}(\sin x-\sin 2x)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{2}\cos 2x+\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}+\left[-\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{9}{4}=\frac{5}{2}$$

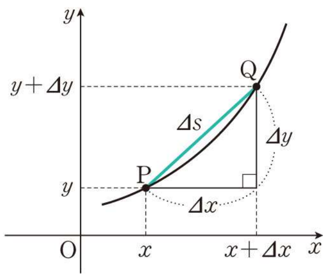


좌표평면 위에서 점이 움직인 거리

좌표평면 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$의 시각 t에서의 위치가 $x=f(t),\ y=g(t)$일 때, 점 P가 시각 $t=a$에서 시각 $t=b$까지 움직인 거리 s는

$$s=\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt$$

▷ 점 P가 시각 a에서 시각 t $(a \le t \le b)$까지 움직인 거리를 $s(t)$라고 하자. 시각이 t에서 $t+\Delta t$로 변할 때 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$가 점 $\mathrm{Q}(x+\Delta x,\ y+\Delta y)$로 움직인다고 하면, $s(t)$의 증분 Δs는 시각 t의 증분 Δt가 충분히 작을 때 선분 PQ의 길이 $\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$에 가까워진다. 따라서



$$\frac{ds}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

따라서 $s(t)$는 미분가능하고 그 도함수는

$$s'(t)=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

이다. 결국 점 P가 시각 $t=a$부터 $t=b$까지 움직인 거리 $s(b)$는

$$s(b)=s(b)-s(a)$$

$$=\int_a^b s'(t)dt=\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

가 된다.

좌표평면 위에서 점 P의 시각 t에서의 좌표 $(x,\ y)$가

$$x=2(2t+3)^{\frac{3}{2}},\quad y=3(t+1)^2$$

일 때, 시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리를 구하시오.

$\dfrac{dx}{dt}=6(2t+3)^{\frac{1}{2}},\ \dfrac{dy}{dt}=6(t+1)$이므로

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=36(2t+3)+36(t^2+2t+1)=36(t^2+4t+4)=36(t+2)^2$$

이때 $0\le t\le 3$에서 $t+2\ge 0$이므로 점 P가 움직인 거리 s는

$$s=\int_0^3\sqrt{36(t+2)^2}\,dt=6\int_0^3(t+2)dt=6\left[\frac{1}{2}(t+2)^2\right]_0^3=6\left(\frac{25}{2}-\frac{4}{2}\right)=63$$

좌표평면 위에서 점 P의 시각 t에서의 좌표 $(x,\ y)$가

$$x=\cos^3 t,\ y=\sin^3 t$$

일 때, 시각 $t=0$에서 $t=\dfrac{\pi}{2}$까지 점 P가 움직인 거리를 구하시오.

$\dfrac{dx}{dt}=3\cos^2 t(-\sin t),\ \dfrac{dy}{dt}=3\sin^2 t(\cos t)$이므로

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=9\cos^2 t\sin^2 t(\cos^2 t+\sin^2 t)=9\cos^2 t\sin^2 t$$

이때 $0\le t\le\dfrac{\pi}{2}$에서 $\cos t\sin t\ge 0$이므로 점 P가 움직인 거리 s는

$$s=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9\cos^2 t\sin^2 t}\,dt=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\sin t\,dt$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\,dt=\frac{3}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$$

곡선의 길이

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 미분가능하고 그 도함수가 연속이면 구간 $[a,\ b]$에서 곡선 $y=f(x)$의 길이 l은

$$l=\int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

▷ 곡선 $y=f(x)$ $(a \le x \le b)$는 매개변수 t를 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$x=t, \quad y=f(t) \ \ (a \le t \le b)$$

이때 구간 $[a,\ b]$에서 이 매개변수로 나타낸 함수의 그래프의 길이는 좌표평면 위에서 점 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$가 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 움직인 거리와 같다. 따라서 곡선 $y=f(x)$의 길이 l은

$$l=\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_a^b \sqrt{1+\{f'(t)\}^2}\,dt$$

$$=\int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

가 된다.

곡선 $y=\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}$ $(1 \le x \le 4)$ 의 길이를 구하시오.

$f(x)=\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}$라고 하면 $f'(x)=(x-1)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x-1}$이므로

주어진 구간에서 곡선의 길이를 l이라고 하면

$$l=\int_1^4 \sqrt{1+\{\sqrt{x-1}\}^2}\,dx=\int_1^4 \sqrt{x}\,dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4=\left(\frac{16}{3}-\frac{2}{3}\right)=\frac{14}{3}$$