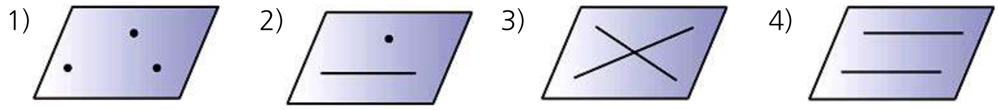
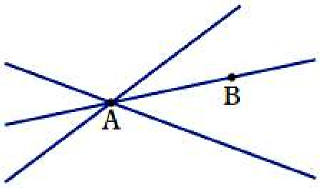
01 직선, 평면의 위치 관계

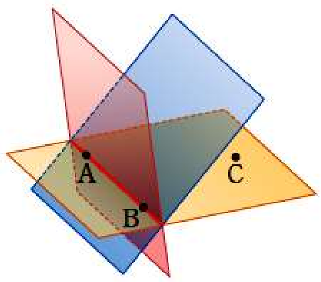
평면의 결정조건

1) 한 직선 위에 있지 않은 서로 다른 세 점
2) 한 직선과 그 직선 위에 있지 않은 한 점
3) 한 점에서 만나는 두 직선
4) 평행한 두 직선



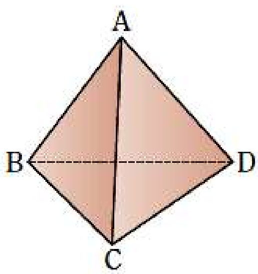
▷ 평면에서와 같이 공간에서도 서로 다른 두 점을 지나는 직선은 오직 하나 뿐이다. 즉, 한 직선은 서로 다른 두 점에 의하여 결정된다. 또 한 평면 위의 서로 다른 두 점을 지나는 직선은 그 평면에 포함된다. 즉, 서로 다른 두 점 A, B를 지나는 평면은 무수히 많다. 그러나 공간에서 한 직선 위에 있지 않은 서로 다른 세 점을 지나는 평면은 오직 하나이다. 이때, 두 점 A, B는 한 직선을 결정하므로 직선 AB와 직선 AB 위에 있지 않은 한 점 C를 동시에 지나는 평면은 단 하나 뿐이다.
또 공간에서 한 점에서 만나는 두 직선은 한 평면을 결정하고 평행한 두 직선도 한 평면을 결정한다.





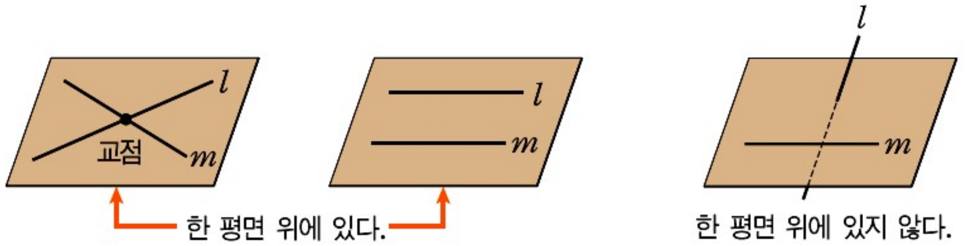
공간에서 한 평면 위에 있지 않은 네 점 중 어느 세 점도 한 직선 위에 있지 않을 때, 이 네 점으로 결정되는 서로 다른 평면의 개수를 구하시오.

네 점을 각각 A, B, C, D라고 하면 오른쪽 그림에서와 같이 평면은 4개가 결정되는 것을 알 수 있다.
한 직선 위에 있지 않은 서로 다른 세 점은 하나의 평면을 결정하므로 ${}_4\mathrm{C}_3 = 4$(가지)가 된다.



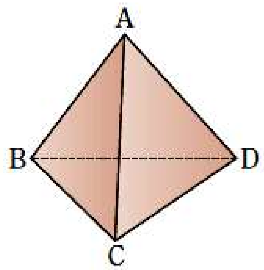
공간에서 두 직선의 위치 관계

(1) 만난다.　(2) 평행하다.　(3) 꼬인 위치에 있다.



▷ 공간에서 서로 다른 두 직선이 한 평면 위에 있으면 이 두 직선은 서로 만나거나 평행하다. 그러나 두 직선이 한 평면 위에 있지 않으면 서로 만나지도 않고, 평행하지도 않은 경우가 있다. 이때, 두 직선은 꼬인 위치에 있다고 한다.

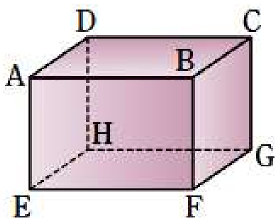
오른쪽 그림의 정사면체에서 서로 꼬인 위치에 있는 모서리를 모두 구하시오.



모서리 AB와 모서리 CD, 모서리 AC와 모서리 BD, 모서리 AD와 모서리 BC는 모두 평행하지도 않고 만나지도 않기 때문에 각각 꼬인 위치에 있다.

오른쪽 그림의 직육면체에서 다음을 구하시오.

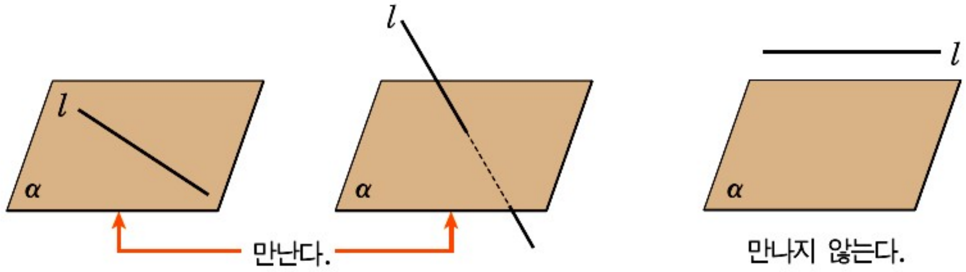
(1) 모서리 AE와 만나는 모서리
(2) 모서리 AE와 평행한 모서리
(3) 모서리 AE와 꼬인 위치에 있는 모서리



(1) 모서리 AB, 모서리 AD, 모서리 EH, 모서리 EF
(2) 모서리 BF, 모서리 CG, 모서리 DH
(3) 모서리 BC, 모서리 CD, 모서리 FG, 모서리 GH

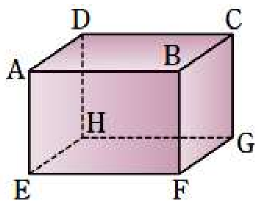
직선과 평면의 위치 관계

(1) 포함된다. (2) 한 점에서 만난다. (3) 평행하다.



▷ 직선과 평면이 한 점만을 공유하면 직선과 평면은 만나고, 두 점 이상을 공유하면 직선 위의 모든 점은 평면 위에 있으므로 직선은 평면에 포함된다.
또, 직선 l과 평면 α가 공유점을 가지지 않으면 직선 l과 평면 α는 평행하고, 기호로 $l \mathbin{/\!/} \alpha$과 같이 나타낸다.

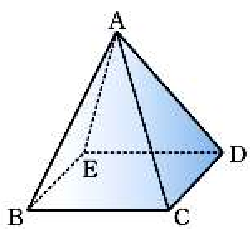
오른쪽 그림의 직육면체에서 직선 AB와 나머지 평면들의 위치 관계를 조사하시오.



(1) 직선 AB는 평면 ABCD, 평면 ABFE에 포함된다.
(2) 직선 AB는 평면 ADHE, 평면 BCGF와 한 점에서 만난다.
(3) 직선 AB는 평면 DCGH, 평면 EFGH와 평행하다.

오른쪽 그림의 정사각뿔에서 다음을 구하시오.

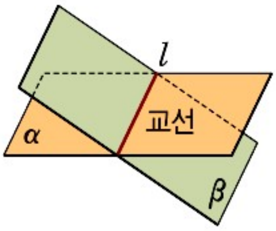
(1) 직선 BC를 포함하는 평면
(2) 직선 BC와 한 점에서 만나는 평면
(3) 직선 BC와 평행한 평면



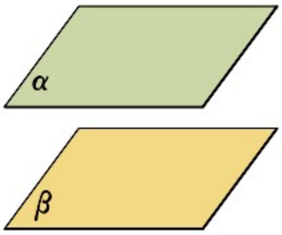
(1) 평면 BCDE, 평면 ABC
(2) 평면 ABE, 평면 ACD
(3) 평면 ADE

평면과 평면의 위치 관계

(1) 만난다.



(2) 평행하다.



(3) 일치한다.

▷ 공간에서 서로 다른 두 평면은 만나거나 만나지 않는다. 서로 다른 두 평면 α, β가 한 점을 공유하면 두 평면은 그 점을 지나는 한 직선을 공유한다. 이때 두 평면은 만난다고 하고 공유하는 직선을 두 평면의 교선이라고 한다. 또, 서로 다른 두 평면 α, β가 만나지 않을 때, 두 평면은 평행하다고 하고 기호로 $\alpha /\!/ \beta$와 같이 나타낸다.

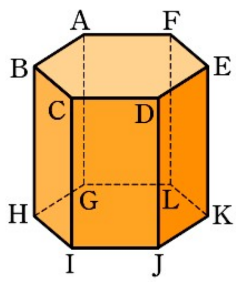
▷ 서로 다른 두 평면 α, β가 두 점 A, B를 공유하면 직선 AB가 두 평면 α, β의 교선이다.

▷ 보통 점은 A, B, C, $\cdots$와 같이 대문자로 나타내고, 직선은 a, b, c, $\cdots$와 같이 소문자로 나타낸다. 또 평면은 α, β, γ, $\cdots$로 나타낸다.

오른쪽 그림과 같이 두 밑면이 정육각형인 육각기둥에서 다음을 구하시오.

(1) 평면 CDJI와 평행한 평면

(2) 평면 BCIH와 평면 CDJI의 교선



(1) 평면 AFLG

(2) 직선 CI

직선, 평면의 평행에 대한 성질

1) 평행한 두 평면 α, β가 다른 평면 γ와 만나서 생기는 교선을 각각 l, m이라고 할 때, l과 m은 서로 평행하다.

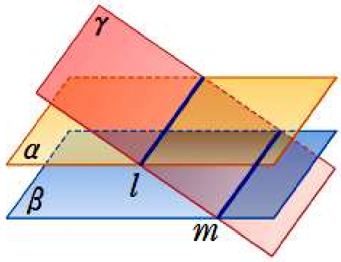
2) 두 평면 α와 β가 평행하면 평면 α에 포함되는 직선은 평면 β와 평행하다.

3) 두 직선 l과 m이 평행할 때, 직선 l을 포함하는 평면 α가 직선 m을 포함하지 않으면 직선 m과 평면 α는 평행하다.

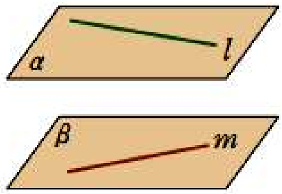
4) 직선 l과 평면 α가 평행할 때, 직선 l을 포함하는 평면 β와 평면 α가 교선 m을 가지면 두 직선 l, m은 서로 평행하다.

5) 평면 α 위에 있지 않은 점 P를 지나고 평면 α에 평행한 서로 다른 두 직선 l, m에 의하여 결정되는 평면 β는 평면 α와 평행하다.

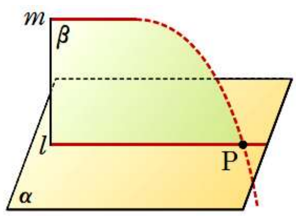
1) 두 평면 α, β는 평행하므로 만나지 않는다.
따라서 평면 α에 포함된 직선 l과 평면 β에 포함된 직선 m도 만나지 않는다.
그런데 두 직선 l, m은 모두 평면 γ 위에 있으므로 $l /\!/ m$이다.



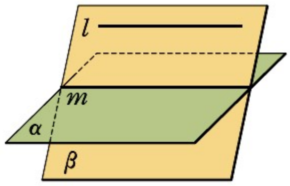
2) 직선 l이 평면 β와 평행하지 않다면 직선 l과 평면 β는 적어도 하나의 공유점 P를 가지게 된다. 이때, 직선 l이 평면 α에 포함되므로 점 P는 두 평면 α와 β의 공유점이 되어 두 평면이 평행하다는 가정에 모순이다. 따라서 직선 l과 평면 β는 평행하다.



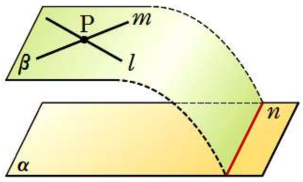
3) 두 직선 l과 m은 평행하므로 한 평면 β를 결정한다.
직선 m과 평면 α가 점 P에서 만난다고 하면 직선 m이 평면 β에 포함되므로 점 P는 평면 β 위의 점이다. 따라서 점 P는 두 평면 α와 β의 공유점이다.
한편, 직선 l은 서로 다른 두 평면 α와 β의 교선이므로 점 P는 직선 l 위의 점이 되어 두 직선 l과 m이 평행하다는 가정에 모순이다. 따라서 $m /\!/ \alpha$이다.



4) 직선 l과 평면 α는 평행하므로 만나지 않는다. 따라서 직선 l은 평면 α 위에 있는 직선 m과 만나지 않는다.
그런데 직선 l과 직선 m은 같은 평면 β 위에 있으므로 $l \parallel m$이다.



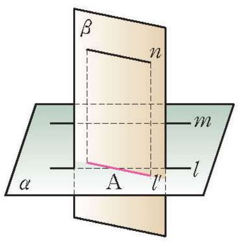
5) 오른쪽 그림과 같이 두 평면 α, β가 평행하지 않고 교선 n을 공유한다고 가정하자. 이때 교선 n은 평면 α에 포함되고 $l \parallel \alpha$, $m \parallel \alpha$ 이므로 직선 n은 두 직선 l, m과 만나지 않는다.
그런데 세 직선 l, m, n은 모두 평면 β에 포함되므로 $l \parallel n$, $m \parallel n$이고 결국 $l \parallel m$이 된다.
이것은 두 직선 l, m이 점 P에서 만난다는 사실에 모순이다.
따라서 $\alpha \parallel \beta$이다.



서로 다른 세 직선 l, m, n에 대하여 $l \parallel m$이고 $m \parallel n$이면 $l \parallel n$임을 보이시오.

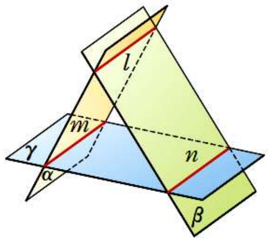
i) 세 직선 l, m, n이 한 평면 위에 있을 때 두 직선 l, n이 만나서 교점 A가 생기면 점 A를 지나고 직선 m과 평행한 직선이 2개가 되어 모순이다. 따라서 두 직선 l, n은 만나지 않으므로 $l \parallel n$이다.

ii) 세 직선 l, m, n이 한 평면 위에 있지 않을 때
평행한 두 직선 l, m이 결정하는 평면을 α라 하자. 이때 직선 l 위의 한 점 A와 직선 n이 결정하는 평면을 β라고 하면 3)에 의하여 $m \parallel \beta$이다.
또 두 평면 α, β의 교선을 l'이라 하면 $m \parallel \beta$이고, l'은 β 위에 있으므로 m과 l'은 만나지 않고 m과 l'은 모두 α 위에 있으므로 $l' \parallel m$이다. 그런데 평면 α 위의 두 직선 l, l'은 한 점 A를 지나면서 직선 m에 평행하므로 일치한다.
또한 $m \parallel n$이므로 3)에 의하여 $n \parallel \alpha$이고, 따라서 직선 n은 평면 α 위의 직선 l'과 만나지 않는다. 또 두 직선 n, l'은 평면 β 위에 있으므로 $n \parallel l'$이다.
결국 $l \parallel n$이 된다.



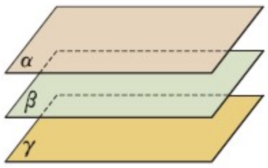
i), ii)에 의하여 $l \parallel n$이다.

두 평면 α와 β의 교선 l과 평면 γ가 평행할 때, 두 평면 α와 γ의 교선 m과 두 평면 β와 γ의 교선 n이 평행함을 보이시오.

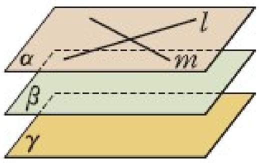


직선 l과 평면 γ는 평행하므로 서로 만나지 않는다. 따라서 직선 l은 평면 γ 위에 있는 직선 m, n과 만나지 않는다. 그런데 직선 l과 직선 m은 같은 평면 α 위에 있으므로 서로 평행하다. 또한 직선 l과 직선 n은 같은 평면 β 위에 있으므로 서로 평행하다. 즉, $l /\!/ m$, $l /\!/ n$이므로 $m /\!/ n$이다.

오른쪽 그림과 같이 서로 다른 세 평면 α, β, γ에 대하여 $\alpha /\!/ \beta$, $\beta /\!/ \gamma$일 때, $\alpha /\!/ \gamma$임을 보이시오.



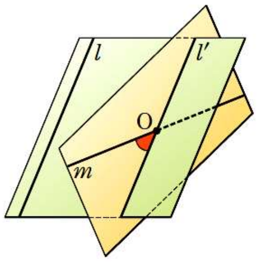
오른쪽 그림과 같이 평면 α 위에 있고 한 점에서 만나는 두 직선을 l, m이라고 하면 $\alpha /\!/ \beta$이므로 $l /\!/ \beta$, $m /\!/ \beta$이다.
두 직선 l, m이 평면 γ와 만난다고 가정하면 $\beta /\!/ \gamma$이므로 두 직선 l, m은 평면 β와도 만난다.
이것은 $l /\!/ \beta$, $m /\!/ \beta$에 모순이므로 $l /\!/ \gamma$, $m /\!/ \gamma$
두 직선 l, m은 모두 평면 α 위에 있으므로 $\alpha /\!/ \gamma$이다.



두 직선이 이루는 각

1) 만나는 두 직선은 한 평면을 결정하므로 그 평면에서 두 직선이 이루는 각을 정할 수 있다.
2) 꼬인 위치에 있는 두 직선 l과 m이 있을 때, l에 평행하면서 m과 만나는 직선 l'을 생각하여 두 직선 l'과 m이 이루는 각을 직선 l과 m이 이루는 각으로 정한다.

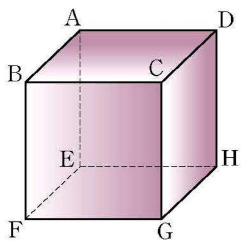
▷ 오른쪽 그림과 같이 두 직선 l, m이 꼬인 위치에 있을 때, 직선 m 위에 한 점 O를 잡고, O를 지나고 직선 l에 평행한 직선 l'을 그으면 두 직선 l', m은 점 O에서 만나므로 한 평면을 결정한다. 이때, 두 직선 l', m이 이루는 각을 두 직선 l, m이 이루는 각이라고 한다.



▷ 공간에서 두 직선이 이루는 각이 직각일 때, l, m은 수직 또는 직교한다고 하고, 기호로 $l \perp m$과 같이 나타낸다.

▷ 두 직선이 이루는 두 개의 각 중 크지 않은 쪽을 두 직선이 이루는 각으로 정한다. 따라서 두 직선이 이루는 각의 크기를 θ라고 하면 $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$이다.

오른쪽 그림과 같은 정육면체에서 다음 두 직선이 이루는 각의 크기를 구하시오.

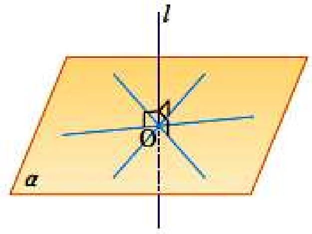


(1) 직선 AB, 직선 DH
(2) 직선 AB, 직선 EG
(3) 직선 AC, 직선 FH

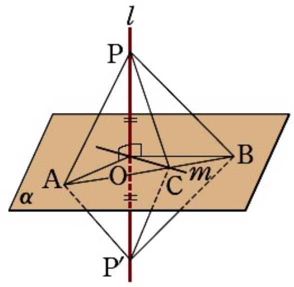
(1) 직선 AB, 직선 DH가 이루는 각은 직선 AE와 직선 AB가 이루는 각으로 정할 수 있다. 따라서 두 직선이 이루는 각은 $\frac{\pi}{2}$이다.
(2) 직선 AB, 직선 EG가 이루는 각은 직선 EF와 직선 EG가 이루는 각으로 정할 수 있다. 따라서 두 직선이 이루는 각은 $\frac{\pi}{4}$이다.
(3) 직선 AC, 직선 FH가 이루는 각은 직선 EG와 직선 FH가 이루는 각으로 정할 수 있다. 두 직선은 정사각형의 두 대각선이 되므로 두 직선이 이루는 각은 $\frac{\pi}{2}$이다.

직선과 평면의 수직

직선 l이 평면 α 위의 모든 직선과 수직일 때, 직선 l과 평면 α는 수직이라고 하며, 이것을 기호로 $l \perp \alpha$와 같이 나타낸다.



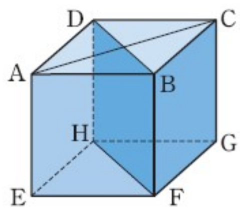
▷ 오른쪽 그림과 같이 직선 l이 평면 α와 만나는 점을 O라 하고 평면 α 위에 $l \perp \overline{\mathrm{OA}}$, $l \perp \overline{\mathrm{OB}}$인 두 점 A, B를 잡고, 점 O를 지나는 평면 α 위의 임의의 직선을 m, 직선 m이 직선 AB와 만나는 점을 C라고 하자.



직선 l 위에 $\overline{\mathrm{PO}} = \overline{\mathrm{P'O}}$인 두 점 P, P′을 잡으면 $\overline{\mathrm{OA}}$, $\overline{\mathrm{OB}}$는 $\overline{\mathrm{PP'}}$의 수직이등분선이므로 $\overline{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{AP'}}$, $\overline{\mathrm{BP}} = \overline{\mathrm{BP'}}$이고 두 삼각형 $\triangle \mathrm{ABP}$, $\triangle \mathrm{ABP'}$에서 $\overline{\mathrm{AB}}$는 공통이므로
$\triangle \mathrm{ABP} \equiv \triangle \mathrm{ABP'}$이다. 따라서 $\angle \mathrm{PAB} = \angle \mathrm{P'AB}$
$\overline{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{AP'}}$가 된다. 또한 두 삼각형 $\triangle \mathrm{PAC}$, $\triangle \mathrm{P'AC}$에서 $\angle \mathrm{PAC} = \angle \mathrm{P'AC}$, $\overline{\mathrm{AC}}$는 공통이므로 $\triangle \mathrm{PAC} \equiv \triangle \mathrm{P'AC}$이고 따라서 $\overline{\mathrm{PC}} = \overline{\mathrm{P'C}}$이다.
이때 $\overline{\mathrm{PO}} = \overline{\mathrm{P'O}}$이고 $\overline{\mathrm{PC}} = \overline{\mathrm{P'C}}$이므로 $\triangle \mathrm{CPP'}$는 이등변삼각형이 되고 $\overline{\mathrm{PP'}} \perp \overline{\mathrm{OC}}$, 즉 $l \perp m$이 된다.
따라서 l은 점 O를 지나는 α 위의 임의의 직선과 수직이므로 $l \perp \alpha$이다.

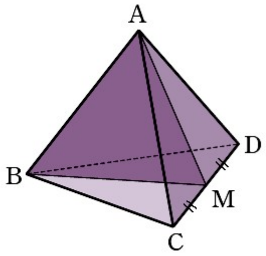
▷ $l \perp \alpha$임을 보이려면 평면 α 위의 평행하지 않은 서로 다른 두 직선이 l과 수직임을 보이면 된다.

오른쪽 정육면체에서 윗 면의 대각선 $\overline{\mathrm{AC}}$와 평면 BFHD가 수직임을 보이시오.



사각형 ABCD는 정사각형이므로 $\overline{\mathrm{AC}} \perp \overline{\mathrm{BD}}$
또 $\overline{\mathrm{BF}} /\!/ \overline{\mathrm{AE}}$, $\overline{\mathrm{AC}} \perp \overline{\mathrm{AE}}$이므로 $\overline{\mathrm{AC}} \perp \overline{\mathrm{BF}}$
$\therefore$ $\overline{\mathrm{AC}} \perp$ (평면 BFHD)

오른쪽 그림과 같은 정사면체에서 모서리 CD의 중점을
M이라고 할 때, $\overline{\mathrm{CD}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$임을 보이시오.



△ACD가 정삼각형이고 점 M이 변 CD의 중점이므로 $\overline{\mathrm{CD}}\perp\overline{\mathrm{AM}}$이다. 또한 △BCD가 정삼각형이고 점 M이 변 CD의 중점이므로 $\overline{\mathrm{CD}}\perp\overline{\mathrm{BM}}$이다. 결국 직선 CD는 두 직선 AM, BM과 모두 수직이므로 두 직선이 만드는 평면 ABM과 수직이 된다. 따라서 직선 CD는 평면 ABM 위의 모든 직선과 수직이 되고, 평면 ABM 위의 직선 AM과도 수직이 된다.

02 삼수선 정리

삼수선 정리

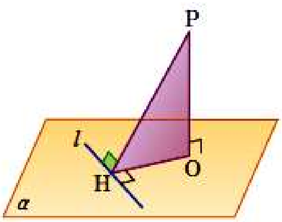
평면 α 위에 있지 않은 점 P, α 위의 점 O를 지나지 않는 α 위의 직선 l, 직선 l 위의 점 H에 대하여 다음이 성립한다.

1) $\overline{\mathrm{PO}}\perp\alpha$, $\overline{\mathrm{OH}}\perp l$ 이면 $\overline{\mathrm{PH}}\perp l$

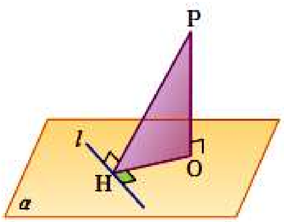
2) $\overline{\mathrm{PO}}\perp\alpha$, $\overline{\mathrm{PH}}\perp l$ 이면 $\overline{\mathrm{OH}}\perp l$

3) $\overline{\mathrm{PH}}\perp l$, $\overline{\mathrm{OH}}\perp l$, $\overline{\mathrm{PO}}\perp\overline{\mathrm{OH}}$ 이면 $\overline{\mathrm{PO}}\perp\alpha$

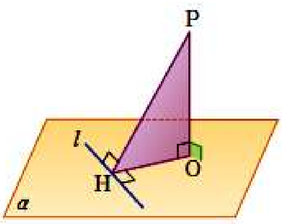
1)



2)



3)

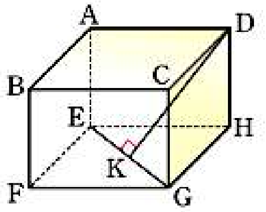


1) $\overline{\mathrm{PO}}\perp\alpha$이면 직선 l이 평면 α 위에 있으므로 $\overline{\mathrm{PO}}\perp l$이다. 또 $\overline{\mathrm{OH}}\perp l$이므로 평면 PHO는 직선 l과 수직이다. 그런데 $\overline{\mathrm{PH}}$는 평면 PHO 위에 있으므로 $\overline{\mathrm{PH}}\perp l$ 이다.

2) $\overline{\mathrm{PO}}\perp\alpha$이고 직선 l이 평면 α 위에 있으므로 $\overline{\mathrm{PO}}\perp l$이다. 또 $\overline{\mathrm{PH}}\perp l$이므로 평면 PHO는 직선 l과 수직이다. 그런데 $\overline{\mathrm{OH}}$는 평면 PHO 위에 있으므로 $\overline{\mathrm{OH}}\perp l$이다.

3) $\overline{\mathrm{PH}}\perp l$, $\overline{\mathrm{OH}}\perp l$이므로 평면 PHO는 직선 l과 수직이다.
그런데 $\overline{\mathrm{PO}}$는 평면 PHO 위에 있으므로 $\overline{\mathrm{PO}}\perp l$이고, 또 $\overline{\mathrm{PO}}\perp\overline{\mathrm{OH}}$이므로 직선 l과 $\overline{\mathrm{OH}}$는 평면 α 위에 있으므로 $\overline{\mathrm{PO}}\perp\alpha$이다.

오른쪽 그림의 직육면체에서 $\overline{AB}=\overline{AE}=2$, $\overline{AD}=\sqrt{5}$이라 하고, 점 D에서 선분 EG에 내린 수선의 발을 K라고 할 때, 선분 DK의 길이를 구하시오.



$\overline{DH}\perp$평면 EFGH, $\overline{DK}\perp\overline{EG}$이므로 $\overline{HK}\perp\overline{EG}$

$$\triangle EGH=\frac{1}{2}\times\overline{HG}\times\overline{EH}=\frac{1}{2}\times\overline{EG}\times\overline{HK} \qquad \therefore \overline{HK}=\frac{2\sqrt{5}}{3}$$

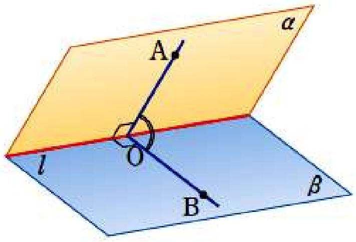
따라서 직각삼각형 DKH에서

$$\overline{DK}=\sqrt{\overline{DH}^{2}+\overline{HK}^{2}}=\sqrt{2^2+\left(\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{56}}{3}=\frac{2}{3}\sqrt{14}$$

이면각

1) 이면각, 이면각의 변, 이면각의 면

오른쪽 그림과 같이 직선 l을 공유하는 두 반평면 α, β로 이루어진 도형을 이면각이라고 한다. 이때 직선 l을 이면각의 변, 두 반평면 α, β를 각각 이면각의 면이라고 한다.



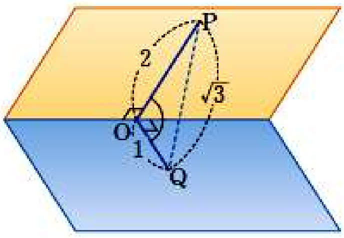
2) 이면각의 크기

이면각의 변 l 위의 한 점 O를 지나고 l에 수직인 반직선 OA, OB를 반평면 α, β 위에 각각 그을 때, $\angle\mathrm{AOB}$의 크기는 점 O의 위치에 관계없이 일정하다. 이 일정한 각의 크기를 이면각의 크기라고 한다.

▷ 두 평면 α, β가 만드는 이면각의 크기 중에서 크지 않은 쪽을 두 평면이 이루는 각의 크기로 정한다. 따라서 두 평면이 이루는 각의 크기를 θ라고 하면 $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$이다.

▷ 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$일 때 두 평면 α, β는 서로 수직이라고 하고 $\alpha \perp \beta$로 나타낸다.

오른쪽 그림에서 $\overline{\mathrm{OP}}=2$, $\overline{\mathrm{OQ}}=1$, $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{3}$일 때, 두 평면이 이루는 각의 크기를 구하시오.



점 O를 지나는 두 평면의 교선을 l이라고 하면 $\overline{\mathrm{OP}} \perp l$, $\overline{\mathrm{OQ}} \perp l$이므로 두 평면이 이루는 이면각의 크기는 $\angle\mathrm{POQ}$와 같다. $\triangle\mathrm{POQ}$에서 $\overline{\mathrm{PO}}^2 = \overline{\mathrm{PQ}}^2 + \overline{\mathrm{OQ}}^2$이므로 $\angle\mathrm{PQO} = \angle\mathrm{R}$이 되고 $\angle\mathrm{POQ} = \theta$라고 할 때, $\cos\theta = \frac{1}{2}$이므로 $\theta = \frac{\pi}{3}$가 된다.

따라서 두 평면이 이루는 각의 크기 역시 $\frac{\pi}{3}$이다.

정사면체에서 두 면이 이루는 이면각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하여라.

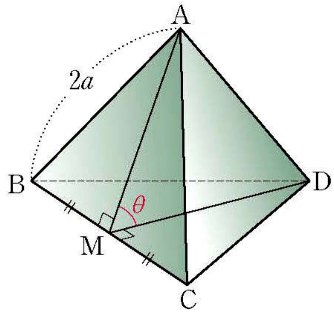
오른쪽 그림과 같은 정사면체의 한 모서리의 길이를 $2a$라고 하자.

모서리 BC의 중점을 M이라고 하면 $\overline{\mathrm{AM}} \perp \overline{\mathrm{BC}}$, $\overline{\mathrm{DM}} \perp \overline{\mathrm{BC}}$ 이므로 $\angle \mathrm{AMD} = \theta$이다.

또 $\triangle \mathrm{AMD}$에서 $\overline{\mathrm{AM}} = \sqrt{3}a$, $\overline{\mathrm{MD}} = \sqrt{3}a$, $\overline{\mathrm{DA}} = 2a$ 이므로

$$\cos\theta = \frac{\overline{\mathrm{AM}}^2 + \overline{\mathrm{MD}}^2 - \overline{\mathrm{DA}}^2}{2 \times \overline{\mathrm{AM}} \times \overline{\mathrm{MD}}}$$

$$= \frac{(\sqrt{3}a)^2 + (\sqrt{3}a)^2 - (2a)^2}{2 \times \sqrt{3}a \times \sqrt{3}a} = \frac{1}{3}$$

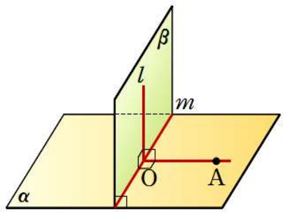


평면 α에 수직인 직선 l을 포함하는 평면을 β라고 할 때, $\alpha \perp \beta$임을 보이시오.

직선 l과 평면 α의 교점을 O라 하고, 두 평면 α와 β의 교선을 m이라고 하자. 평면 α 위에서 점 O를 지나고 직선 m에 수직인 직선 OA를 그으면

$$\overleftrightarrow{\mathrm{OA}} \perp m, \quad l \perp m$$

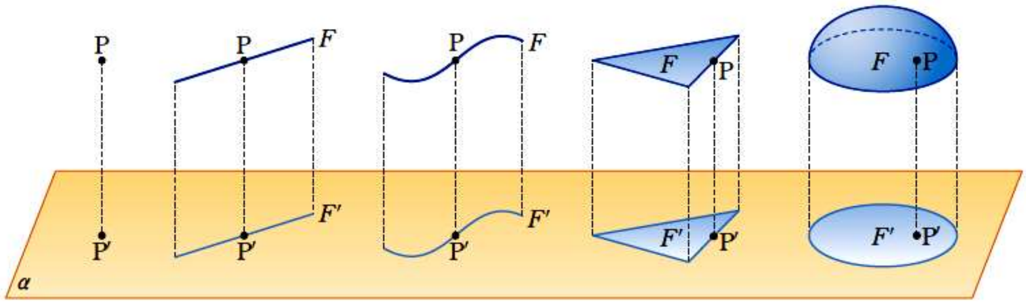
이므로 두 평면이 이루는 이면각의 크기는 두 직선 OA와 l이 이루는 각의 크기이다. 그런데 $l \perp \alpha$이고, 직선 OA는 평면 α 위의 직선이므로 $l \perp \overleftrightarrow{\mathrm{OA}}$ 이다. 따라서 $\alpha \perp \beta$이다.



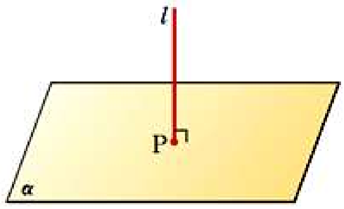
03 정사영

정사영

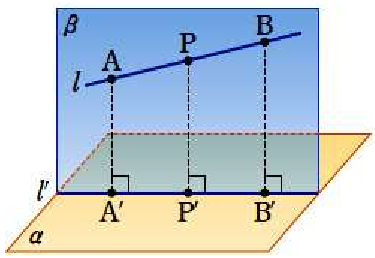
평면 α 위에 있지 않은 한 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발 P′을 점 P의 평면 α 위로의 정사영이라고 한다.
일반적으로 도형 F의 각 점에서 평면 α에 내린 수선의 발로 이루어진 도형 F′을 도형 F의 평면 α 위로의 정사영이라고 한다.



▷ 직선 l이 평면 α에 수직일 때, 직선 l을 평면 α에 내린 정사영은 직선 l과 평면 α의 교점이 된다.

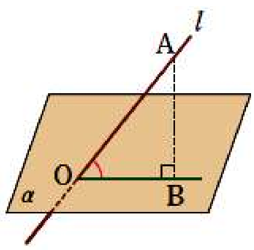


▷ 직선 l이 평면 α와 수직이 아닐 때, 직선 l 위에 있는 두 점 A, B의 평면 α 위로의 정사영을 각각 A′, B′이라 하면 $\overline{\mathrm{AA'}} /\!/ \overline{\mathrm{BB'}}$이므로 두 직선 AA′, BB′은 한 평면 β를 결정하며 $\alpha \perp \beta$이다. 이때 직선 l은 평면 β 위에 있으므로 직선 l 위의 임의의 점 P의 평면 α 위로의 정사영 P′은 두 평면 α, β의 교선 l' 위에 있게 된다. 따라서 직선 l의 평면 α 위로의 정사영은 직선 l'이다.



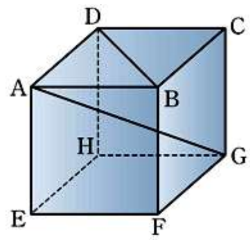
▷ 일반적으로 직선의 평면 위로의 정사영은 한 점 또는 직선이고, 다각형의 평면 위로의 정사영은 선분 또는 다각형이다.

▷ 직선 l과 평면 α가 수직이 아닐 때, 직선 l의 평면 α위로의 정사영 l'와 직선 l이 이루는 각을 직선 l과 평면 α가 이루는 각이라고 한다. 즉, 직선 l과 평면 α의 교점을 O, 직선 l 위의 한 점 A에서 평면 α에 내린 수선의 발을 B라고 할 때 $\angle$AOB가 직선 l과 평면 α가 이루는 각이 된다.



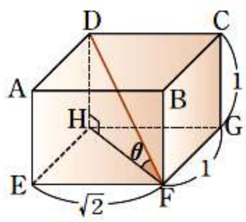
오른쪽 그림과 같은 정육면체 $\mathrm{ABCD-EFGH}$에 대하여 다음을 구하시오.

(1) 선분 AG의 평면 EFGH 위로의 정사영
(2) 선분 BD의 평면 AEFB 위로의 정사영
(3) 삼각형 BDE의 평면 EFGH 위로의 정사영



(1) 선분 EG
(2) 선분 AB
(3) 삼각형 EFH

오른쪽 그림과 같은 직육면체에서 대각선 DF가 밑면 EFGH와 이루는 각의 크기 θ를 구하시오.



$\overline{\mathrm{HF}} = \sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{DF}} = 2$, $\angle \mathrm{DHF} = \frac{\pi}{2}$이므로 $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\ \theta = \frac{\pi}{6}$

정사영의 길이

선분 AB의 평면 α 위로의 정사영을 선분 A′B′이라 하고, 직선 AB와 평면 α가 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때

$$\overline{\mathrm{A'B'}}=\overline{\mathrm{AB}}\cos\theta\quad\left(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$$

▷ $\overline{\mathrm{A'B'}}$은 $\overline{\mathrm{AB}}$의 평면 α 위로의 정사영이므로

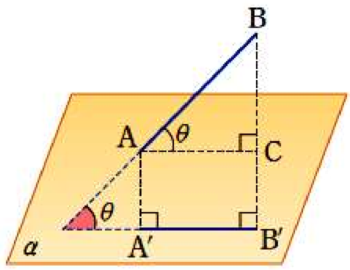
$$\overline{\mathrm{AA'}}\perp\alpha,\quad \overline{\mathrm{BB'}}\perp\alpha,\quad \overline{\mathrm{AA'}}\,/\!/\,\overline{\mathrm{BB'}}$$

이다. 점 A에서 직선 BB′에 내린 수선의 발을 C라 하면 사각형 AA′B′C는 직사각형이므로

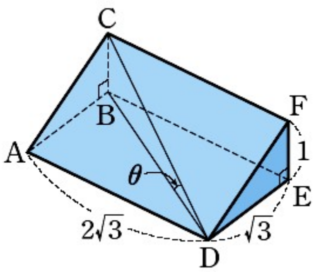
$$\overline{\mathrm{A'B'}}=\overline{\mathrm{AC}},\quad \overline{\mathrm{A'B'}}\,/\!/\,\overline{\mathrm{AC}}$$

따라서 $\angle\mathrm{BAC}=\theta$이다.
삼각형 ABC에서 $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{AB}}\cos\theta$이므로

$$\overline{\mathrm{A'B'}}=\overline{\mathrm{AB}}\cos\theta$$



오른쪽 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AD}}=2\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{DE}}=\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{EF}}=1$ 이고, 두 밑면이 직각삼각형인 삼각기둥이 있다. $\overline{\mathrm{BD}}$와 $\overline{\mathrm{CD}}$가 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하시오.



$\overline{\mathrm{CD}}$의 평면 ABED 위로의 정사영이 $\overline{\mathrm{BD}}$이므로 $\cos\theta=\dfrac{\overline{\mathrm{BD}}}{\overline{\mathrm{CD}}}$

$\overline{\mathrm{CD}}^2=\overline{\mathrm{AD}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=\overline{\mathrm{AD}}^2+\left(\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2\right)=(2\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^2+1^2=16\qquad\therefore\ \overline{\mathrm{CD}}=4$

$\overline{\mathrm{BD}}^2=\overline{\mathrm{AD}}^2+\overline{\mathrm{AB}}^2=(2\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^2=15\qquad\therefore\ \overline{\mathrm{BD}}=\sqrt{15}$

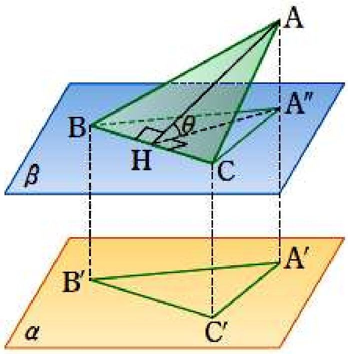
$\therefore\ \cos\theta=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

정사영의 넓이

평면 α 위의 도형 F와 이 도형의 평면 β 위로의 정사영 F$'$의 넓이를 각각 S, S'이라 하고, 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때

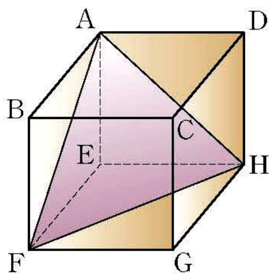
$$S' = S\cos\theta \quad \left(0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right)$$

▷ 오른쪽 그림과 같이 변 BC를 포함하고 평면 α에 평행한 평면을 β라 하고, 점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라고 하자. 이때 평면 β와 직선 AA$'$의 교점을 A$''$이라 고 하면 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{A''H}} \perp \overline{\mathrm{BC}}$ 이다. 따라서



$$\begin{aligned} S' &= \triangle \mathrm{A'B'C'} = \triangle \mathrm{A''BC} \\ &= \frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{BC}} \times \overline{\mathrm{A''H}} \\ &= \frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{BC}} \times \overline{\mathrm{AH}} \times \cos\theta \\ &= S\cos\theta \end{aligned}$$

오른쪽 그림과 같은 정육면체에서 평면 AFH와 평면 EFGH가 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하시오.



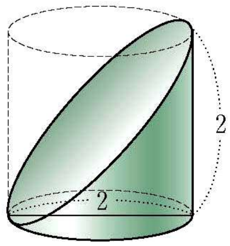
삼각형 AFH의 평면 EFGH 위로의 정사영은 삼각형 EFH이므로

$$\triangle \mathrm{EFH} = \triangle \mathrm{AFH}\cos\theta$$

정육면체의 한 모서리의 길이를 a로 놓으면 삼각형 AFH는 한 변의 길이가 $\sqrt{2}a$인 정삼각형이므로

$$\therefore\ \cos\theta = \frac{\triangle \mathrm{EFH}}{\triangle \mathrm{AFH}} = \frac{\frac{1}{2}a^2}{\frac{\sqrt{3}}{2}a^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

밑면인 원의 지름과 높이가 모두 2인 원기둥을 오른쪽 그림과 같이 잘라 부피가 절반이 되도록 하였다. 이때 단면의 넓이를 구하시오.



단면의 넓이를 S', 밑면의 넓이를 S라 하고, 단면을 포함하는 평면과 밑면을 포함하는 평면이 이루는 각의 크기를 θ라고 하면 $S=S'\cos\theta$가 성립한다.

$$\therefore\ S'=\frac{S}{\cos\theta}=\frac{\pi}{\cos\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}\pi$$

01 점의 좌표

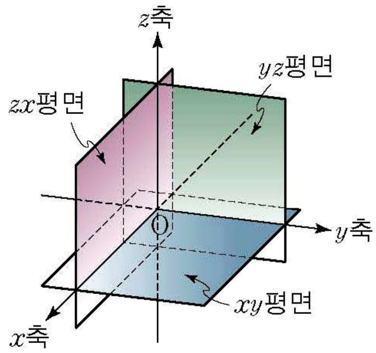
공간에서 점의 좌표

1) 좌표축과 좌표평면

오른쪽 그림과 같이 공간의 한 점 O에서 서로 직교하는 세 수직선을 그었을 때, 점 O를 원점, 각각의 수직선을 x축, y축, z축이라 하고, 이 세 축을 좌표축이라고 한다. 또

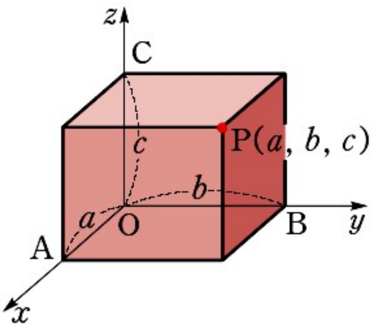
x축과 y축에 의하여 결정되는 평면을 xy평면
y축과 z축에 의하여 결정되는 평면을 yz평면
z축과 x축에 의하여 결정되는 평면을 zx평면

이라 하고, 이들을 좌표평면이라고 한다.



2) 공간좌표와 좌표공간

공간에 있는 임의의 한 점 P에 대하여 점 P를 지나고 yz평면, zx평면, xy평면에 평행한 평면이 x축, y축, z축과 만나는 점을 각각 A, B, C라고 하자. 이때 세 점 A, B, C의 x축, y축, z축 위에서의 좌표를 각각 a, b, c라고 하면, 점 P에 대응하는 세 실수의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$가 정해진다. 역으로 세 실수의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$가 주어지면 공간의 한 점 P가 정해진다. 따라서 공간의 한 점 P와 세 실수의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$ 사이에는 일대일대응의 관계가 성립한다.



이 실수의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$를 점 P의 공간좌표 또는 좌표라고 하며, a, b, c를 차례로 점 P의 x좌표, y좌표, z좌표라고 한다. 점 P의 좌표가 $(a,\ b,\ c)$일 때, 이것을 기호로

$$\mathrm{P}(a,\ b,\ c)$$

와 같이 나타낸다. 또 이와 같이 임의의 점 P의 좌표가 주어진 공간을 좌표공간이라고 한다.

▷ xy평면은 $z=0$에서 z축과 수직으로 만나므로 xy평면 위의 모든 점의 z좌표는 0이다. 따라서 xy평면은 $z=0$으로 나타낼 수 있다. 마찬가지로 yz평면은 $x=0$, zx평면은 $y=0$으로 나타낼 수 있다.

점 $\mathrm{P}(2,\ -4,\ 3)$에 대하여 다음 점의 좌표를 구하시오.

(1) 원점에 대하여 대칭인 점

(2) x축에 대하여 대칭인 점

(3) y축에 대하여 대칭인 점

(4) zx평면에 대하여 대칭인 점

(1) 점 $(x,\ y,\ z)$의 원점에 대하여 대칭인 점은 $(-x,\ -y,\ -z)$이므로 구하는 점은 $(-2,\ 4,\ -3)$이다.

(2) 점 $(x,\ y,\ z)$의 x축에 대하여 대칭인 점은 $(x,\ -y,\ -z)$이므로 구하는 점은 $(2,\ 4,\ -3)$이다.

(3) 점 $(x,\ y,\ z)$의 y축에 대하여 대칭인 점은 $(-x,\ y,\ -z)$이므로 구하는 점은 $(-2,\ -4,\ -3)$이다.

(4) 점 $(x,\ y,\ z)$의 zx평면에 대하여 대칭인 점은 $(x,\ -y,\ z)$이므로 구하는 점은 $(2,\ 4,\ 3)$이다.

좌표공간에서 두 점 사이의 거리

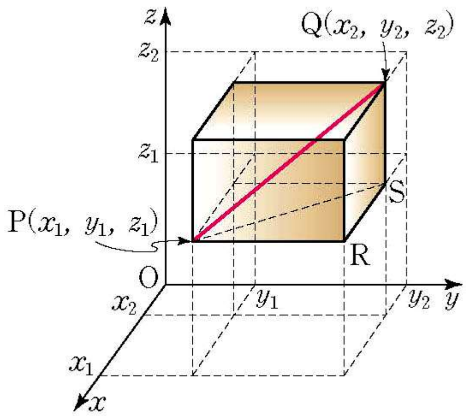
좌표공간의 두 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1, z_1)$과 $\mathrm{Q}(x_2, y_2, z_2)$ 사이의 거리는

$$\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

특히 원점 O와 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1, z_1)$ 사이의 거리는

$$\overline{\mathrm{OP}} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

▷ 오른쪽 그림과 같이 선분 PQ가 세 좌표평면 중 어느 것과도 평행하지 않을 때, 선분 PQ를 대각선으로 하고 각 면이 어느 한 좌표평면과 평행한 직육면체를 만들면



$$\overline{\mathrm{RS}} = |x_2 - x_1|$$
$$\overline{\mathrm{PR}} = |y_2 - y_1|$$
$$\overline{\mathrm{QS}} = |z_2 - z_1|$$

이다. 이때 피타고라스의 정리에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PQ}}^2 &= \overline{\mathrm{PS}}^2 + \overline{\mathrm{QS}}^2 \\ &= \left(\overline{\mathrm{PR}}^2 + \overline{\mathrm{RS}}^2\right) + \overline{\mathrm{QS}}^2 \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2\end{aligned}$$

$$\therefore\ \overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

선분 PQ가 세 좌표평면 중 어느 한 평면과 평행한 경우에도 위의 식은 성립한다.

▷ 원점 O의 좌표는 $\mathrm{O}(0, 0, 0)$이므로 원점 O와 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1, z_1)$ 사이의 거리는

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{OP}} &= \sqrt{(x_1 - 0)^2 + (y_1 - 0)^2 + (z_1 - 0)^2} \\ &= \sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2}\end{aligned}$$

두 점 $A(1,\ 4,\ -3)$, $B(-2,\ 3,\ 1)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점 P의 좌표를 구하시오.

점 P의 좌표를 $(x,\ 0,\ 0)$으로 놓으면

$\overline{AP}^2=(x-1)^2+(0-4)^2+\{0-(-3)\}^2=x^2-2x+26$

$\overline{BP}^2=(x+2)^2+(0-3)^2+(0-1)^2=x^2+4x+14$

이때, $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$x^2-2x+26=x^2+4x+14$ $\qquad 6x=12$

$\therefore\ x=2$

따라서 구하는 점 P의 좌표는 $P(2,\ 0,\ 0)$

02 선분의 내분점과 외분점

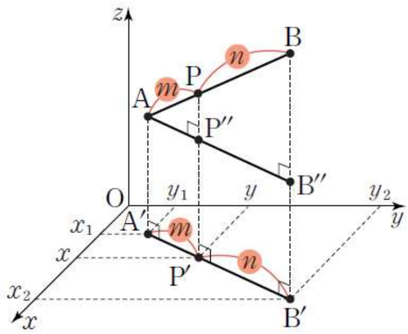
좌표공간에서 선분의 내분점과 외분점

좌표공간에서 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2,\ z_2)$에 대하여 선분 AB를 $m : n$ $(m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점을 P, 외분하는 점을 Q라고 하면

$$\mathrm{P}\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\ \frac{my_2+ny_1}{m+n},\ \frac{mz_2+nz_1}{m+n}\right)$$

$$\mathrm{Q}\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n},\ \frac{my_2-ny_1}{m-n},\ \frac{mz_2-nz_1}{m-n}\right)\ (\text{단, } m\neq n)$$

▷ xy평면에 내린 세 점 A, B, P의 정사영을 각각 A′, B′, P′이라고 하면 $\mathrm{A}'(x_1, y_1, 0)$, $\mathrm{B}'(x_2, y_2, 0)$, $\mathrm{P}'(x, y, 0)$이다. 이제, 두 선분 AB와 A′B′으로 결정되는 평면 위에 점 A를 지나고 선분 A′B′에 평행한 직선을 그어서 두 선분 PP′, BB′과 만나는 점을 각각 P″, B″이라고 하면 △APP″과 △ABB″은 닮음이고



$$\overline{\mathrm{AP''}}=\overline{\mathrm{A'P'}},\quad \overline{\mathrm{P''B''}}=\overline{\mathrm{P'B'}}$$

이다. 따라서

$$\overline{\mathrm{A'P'}} : \overline{\mathrm{P'B'}}=\overline{\mathrm{AP}} : \overline{\mathrm{PB}}=m : n$$

이다. 즉, 점 P′은 xy평면의 선분 A′B′을 $m : n$으로 내분하는 점이므로

$$x=\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\quad y=\frac{my_2+ny_1}{m+n}$$

이다. 마찬가지로 zx평면에 내린 정사영을 생각하면 점 P의 z좌표는

$$z=\frac{mz_2+nz_1}{m+n}$$

임을 알 수 있다.

삼각형 ABC에 대하여 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2,\ z_2)$, $\mathrm{C}(x_3,\ y_3,\ z_3)$일 때, 무게중심 G의 좌표를 구하시오.

점 B와 점 C의 중점을 M이라고 하면 삼각형 ABC의 무게중심은 점 A와 점 M을 $2:1$로 내분하는 점이다.

점 B와 점 C의 중점은 $\mathrm{M}\left(\dfrac{x_2+x_3}{2},\ \dfrac{y_2+y_3}{2},\ \dfrac{z_2+z_3}{2}\right)$이므로

무게중심은 G의 x, y, z 좌표는 각각

$$\frac{2\times\left(\dfrac{x_2+x_3}{2}\right)+x_1}{2+1}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$$

$$\frac{2\times\left(\dfrac{y_2+y_3}{2}\right)+y_1}{2+1}=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$$

$$\frac{2\times\left(\dfrac{z_2+z_3}{2}\right)+z_1}{2+1}=\frac{z_1+z_2+z_3}{3}$$

따라서 무게중심은 $\mathrm{G}\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3},\ \dfrac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$와 같다.

03 구의 방정식

구의 방정식

중심이 $\mathrm{C}(a,\ b,\ c)$이고, 반지름의 길이가 r인 구의 방정식은

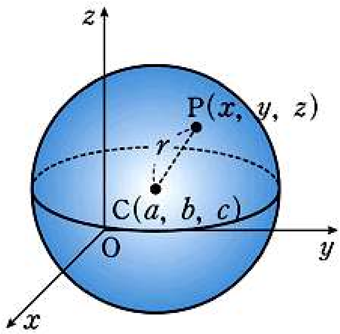
$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

특히, 중심이 원점 O이고, 반지름의 길이가 r인 구의 방정식은

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$

▷ 공간에서 한 점 C로부터 일정한 거리에 있는 점 전체의 집합을 구라고 한다. 이때 점 C를 구의 중심, 일정한 거리를 구의 반지름의 길이라고 한다.

▷ 구 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$라 하면 $\overline{\mathrm{CP}}=r$이므로



$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}=r$$

이다. 이 식의 양변을 제곱하면

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

역으로 이 방정식을 만족하는 임의의 점 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$는 $\overline{\mathrm{CP}}=r$이므로 중심이 $\mathrm{C}(a,\ b,\ c)$이고 반지름의 길이가 r인 구 위에 있다. 따라서 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$은 구하는 구의 방정식이다.

▷ 구의 방정식 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$를 전개하여 정리하면 $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+a^2+b^2+c^2-r^2=0$이다. 이때 $-2a=A$, $-2b=B$ $-2c=C$, $a^2+b^2+c^2-r^2=D$라고 하면 구의 방정식은

$$x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$$

의 꼴로 나타낼 수 있다. 역으로 위 식을 변형하면

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2+\left(z+\frac{C}{2}\right)^2=\frac{A^2+B^2+C^2-4D}{4}$$

이므로 $A^2+B^2+C^2-4D>0$ 이면 이 식은 중심의 좌표가 $\left(-\frac{A}{2},\ -\frac{B}{2},\ -\frac{C}{2}\right)$이고 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2-4D}}{2}$인 구를 나타낸다.

중심이 $(1,\ 4,\ 0)$이고, 구 $x^2+y^2+z^2-6y+8z+23=0$에 외접하는 구의 방정식을 구하시오.

주어진 구의 방정식을 정리하면 $x^2+(y-3)^2+(z+4)^2=2$
또한 두 구의 중심 사이의 거리와 반지름의 합이 같으므로 구하는 구의 반지름의 길이를 r라 하면

$$\sqrt{1^2+1^2+(-4)^2}=\sqrt{2}+r \qquad \therefore r=2\sqrt{2}$$

따라서 구하는 구의 방정식은 $(x-1)^2+(y-4)^2+z^2=8$

두 점 $\mathrm{A}(1,\ 3,\ -1)$, $\mathrm{B}(-3,\ 1,\ 5)$를 지름의 양 끝점으로 하는 구의 방정식을 구하시오.

선분 AB의 중점을 $\mathrm{C}(a,\ b,\ c)$라고 하면

$$a=\frac{1+(-3)}{2}=-1,\ b=\frac{3+1}{2}=2,\ c=\frac{-1+5}{2}=2$$

이므로 구의 중심은 점 $\mathrm{C}(-1,\ 2,\ 2)$이다.
또 반지름의 길이는 $\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{(-2)^2+(-1)^2+3^2}=\sqrt{14}$
이므로 구하는 구의 방정식은 $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=14$