제2장 단면의 성질 핵심요약

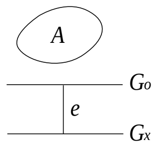
① 단면 1차 모멘트(면적모멘트): G → 단위 : ㎤, ㎥

1) **임의 도형** : $G_x = \int_A y \cdot dA$, $G_y = \int_A x \cdot dA$

2) **면적과 도심을 알고 있을 때** : $G_x = A \cdot y_o$ = (면적)×(도심까지의 거리), $G_y = A \cdot x_o$

3) **알고 있는 축으로부터 평행이동한 축의 단면 1차 모멘트**

$G_x = G_o + A \cdot e \Rightarrow$ (구하려는 축의 G) = (알고 있는 축의 G) + (면적)×(평행이동 거리)



② 도심 : C → 단위 : ㎝, m

1) **공 식** : $x_o = \dfrac{G_y}{A} = \dfrac{\int x \cdot dA}{\int dA} = \dfrac{\text{단면1차 모멘트}}{\text{면적}}$

$y_o = \dfrac{G_x}{A} = \dfrac{\int y \cdot dA}{\int dA}$

2) **Pappus의 정의**

① 제1정리(회전체의 표면적) : 선분 L을 x축 또는 y축 주위로 회전시켰을 때 생긴 표면적은 선분(L) ×도심이동거리이다. ⇒

$A = L \cdot x_c \cdot \theta \rightarrow x_c = \dfrac{A}{L \cdot \theta}$

$A = L \cdot y_c \cdot \theta \rightarrow y_c = \dfrac{A}{L \cdot \theta}$

⇒ 선분의 도심을 구할 때 이용한다. : $\dfrac{1}{2}$ 원호와 $\dfrac{1}{4}$ 원호의 도심 $y_c = \dfrac{2r}{\pi}$

② 제2정리(회전체의 체적) : 면적 A을 x축 또는 y축 주위로 회전시켰을 때 체적은 면적(A)×도심이동거리이다. ⇒

$V = A \cdot x_c \cdot \theta \rightarrow x_c = \dfrac{V}{A \cdot \theta}$

$V = A \cdot y_c \cdot \theta \rightarrow y_c = \dfrac{V}{A \cdot \theta}$

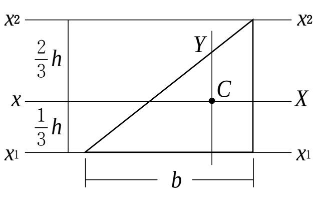
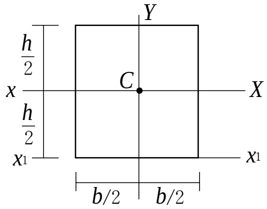
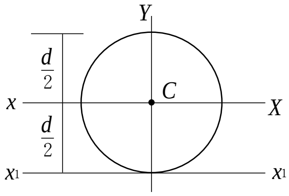
⇒ 면적의 도심을 구할 때 이용한다. : $\dfrac{1}{2}$ 원과 $\dfrac{1}{4}$ 원의 도심 $y_c = \dfrac{4r}{3\pi}$

③ 단면2차 모멘트(관성모멘트) : I → 단위 : cm^4, m^4

1) **기본식** : $I_x = \int_A y^2 dA$, $I_y = \int_A x^2 dA$

2) **임의 축의 단면 2차 모멘트** : $I_x = I_o + A \cdot y^2$ = (도심축의 I_o) + (면적) × (도심까지 거리)

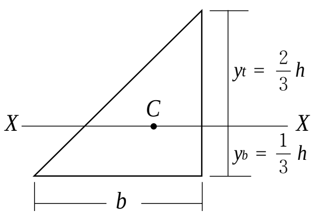
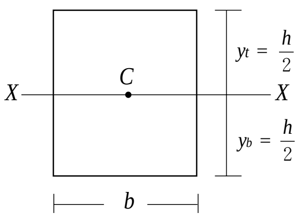
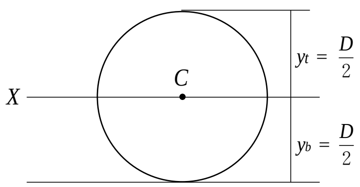
3) **기본 도형의 단면 2차 모멘트**

<table>
<tr><td>배 수</td><td>$I_{X1} = 3I_X$, $I_{X2} = 3^2 I_X$</td><td>$I_{X1} = 4I_X$</td><td>$I_{X1} = 5I_X$</td></tr>
<tr><td>도 형</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>도 형</td><td>$I_X = \frac{bh^3}{36}$, $I_Y = \frac{b^3h}{36}$</td><td>$I_X = \frac{bh^3}{12}$, $I_Y = \frac{b^3h}{12}$</td><td>$I_X = I_Y = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi r^4}{4}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">임의축
(평행축)</td><td>$I_{X1} = 3\frac{bh^3}{36} = \frac{bh^3}{12}$</td><td rowspan="2">$I_{X1} = \boxed{4}\frac{bh^3}{12} = \frac{bh^3}{3}$</td><td rowspan="2">$I_{X1} = 5\frac{\pi d^4}{64} = 5\frac{\pi r^4}{4}$</td></tr>
<tr><td>$I_{X2} = 3 \cdot 3\frac{bh^3}{36} = \frac{bh^3}{4}$</td></tr>
</table>

④ 단면계수 : Z → 단위 : cm^3, m^3

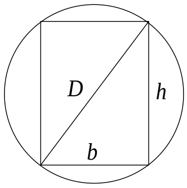
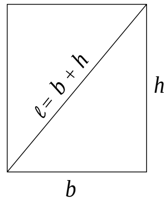
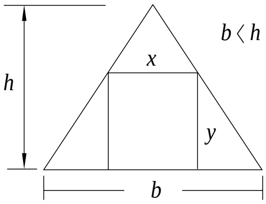
1) **단위계수**(Z) = $\frac{\text{도심축의 단면2차모멘트}}{\text{도심축으로부터 단면 가장자리까지 거리}}$: $Z = \frac{I}{y}$

2) **기본도형의 단면계수**

<table>
<tr><td>비대칭도형 : 2개의 단면계수</td><td>대칭도형 : 1개의 단면계수</td><td>대칭도형 : 1개의 단면계수</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$Z_t = \frac{bh^2}{24}$, $Z_b = \frac{bh^2}{12}$</td><td>$Z_t = Z_b = Z = \frac{bh^2}{6}$</td><td>$Z_t = Z_b = Z = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi r^3}{4}$</td></tr>
</table>

* 비대칭 단면의 휨응력계산시 사용하는 단면계수는 작은 값을 택한다.

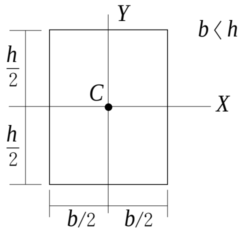
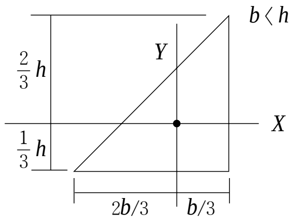
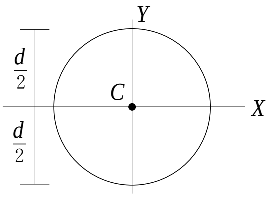
3) **경제적인 단면**

			
단면 계수	$b:h:D=1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$	$b:h:\ell=1:2:3$	$(b,h):y:x=3:2:1$
	$b=\frac{1}{\sqrt{3}}D,\ h=\sqrt{\frac{2}{3}}D$	$b=\frac{1}{3}\ell,\ h=\frac{2}{3}\ell$	$x=\frac{1}{3}b,\ y=\frac{2}{3}h$

⑤ 단면2차반경(회전반경) : r → 단위 : ㎝, m

1) **단위계수**(r) = $\sqrt{\frac{\text{단면2차모멘트}}{\text{단면적}}}$: $r=\sqrt{\frac{I}{A}}$

2) **기본도형의 회전반경**

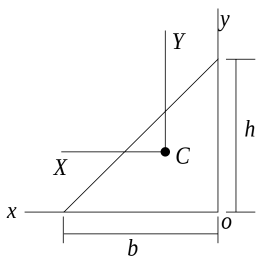
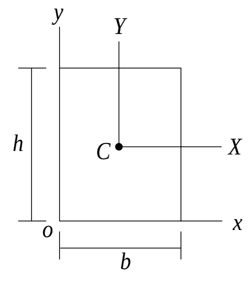
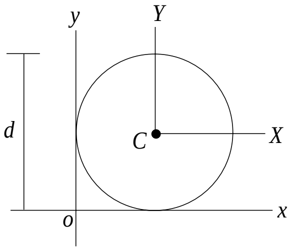
			
회전반경	$r_{X(max)}=\frac{h}{2\sqrt{3}},\ r_{Y(min)}=\frac{b}{2\sqrt{3}}$	$r_{X(max)}=\frac{h}{3\sqrt{2}},\ r_{Y(min)}=\frac{b}{3\sqrt{2}}$	$r_X=r_Y=r=\frac{d}{4}=\frac{r}{2}$
기억하는 방법	2	3	4
	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	1

⑥ 단면 극2차 모멘트(극관성모멘트) : I_p → 단위 : ㎝^{4}, m^4

1) **기본식** : $I_p=\int_A \rho^2 dA=\int_A (x^2+y^2)\,dA=\int_A y^2 dA+\int_A x^2 dA=I_x+I_y$

2) **임의 축의 극2차 모멘트** : $I_{po}=I_{pc}+A\cdot\rho^2$ =(도심의 I_{pc})+(면적)×(도심까지 극거리)

3) **기본 도형의 극2차 모멘트**

			
도심축	$I_{pc}=\frac{bh}{36},(b^2+h^2)$	$I_{pc}=\frac{bh}{12},(b^2+h^2)$	$I_{pc}=2(\frac{\pi d^4}{64})=\frac{\pi d^4}{32}$
임의축	$I_{po}=3\cdot\frac{bh}{36},(b^2+h^2)$	$I_{po}=\boxed{4}\ \frac{bh}{12},(b^2+h^2)$	$I_{po}=5\ \frac{\pi d^4}{32}$

＊원형단면의 극2차 모멘트(Ip)는 원형단면의 비틀림 상수(J)와 같다. : $\tau=\frac{T\cdot r}{J}=\frac{T\cdot r}{I_p}=\frac{16T}{\pi d^3}$

7 단면상승모멘트(관성상승모멘트) : Ixy → 단위 : cm^4, m^4

1) **기본식** : $I_{xy}=\int_A x\cdot y\ dA$

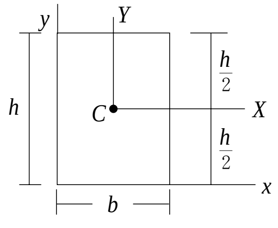
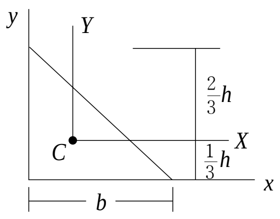
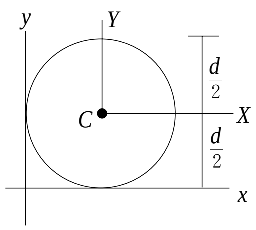
① 비대칭 단면 : $I_{xy}=\int_A x\cdot y\ dA$

② 대칭 단면 : $I_{xy}=x\cdot y\ A$

2) **임의 축의 단면상승모멘트** : $I_{xy}=I_{xcYc}+A\cdot x\cdot y$

=(도심의 I_{xcYc})+(면적)×(도심까지 x거리)×(도심까지 y거리)

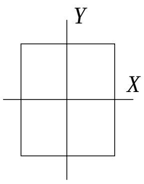
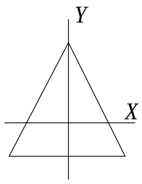
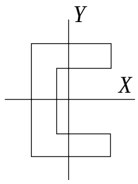
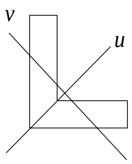
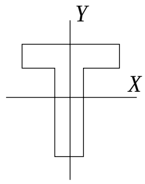
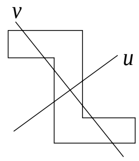
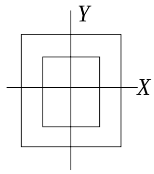
3) **기본도형의 단면상승모멘트**

			
도심축	$I_{xcYc}=0$	$I_{xcYc}=\frac{1}{3}(-\frac{b^2h^2}{24})=-\frac{b^2h^2}{72}$	$I_{xcYc}=0$
임의축	$I_{xy}=\frac{b^2h^2}{4}$	$I_{xy}=\frac{b^2h^2}{4}(\frac{1}{2})(\frac{1}{3})=\frac{b^2h^2}{24}$	$I_{xy}=\frac{\pi d^2}{16}$

⑧ 주축 및 주단면2차모멘트

1) **주 축** : 극대, 극소의 단면 2차 모멘트를 갖는 직교한 두 축을 주축이라 한다.

① 주축의 판별

						
대칭축 2개	대칭축 1개	대칭축 1개	대칭축 0개	대칭축 1개	대칭축 0개	대칭축 2개
$I_X = max$, $I_Y = min$	$I_X = max$, $I_Y = min$	$I_X = max$, $I_Y = min$	$I_u = max$, $I_v = min$	$I_X = max$, $I_Y = min$	$I_u = max$, $I_v = min$	$I_X = max$, $I_Y = min$

② 좌굴 방향 : ・최대 주축과 같은 방향(I_{max})
　　　　　　 ・최소 주축과 직각 방향(I_{min})

2) **주단면 2차 모멘트** : 주축에 대한 최대 최소 단면 2차모멘트를 주단면 2차모멘트라 한다.

① 주단면 2차 모멘트 : $I_p = \left\langle \begin{matrix} I_{max} \\ I_{min} \end{matrix} \right\rangle = \dfrac{I_x + I_y}{2} \pm \dfrac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4 I_{xy}^{\ 2}}$

② 주축의 방향 : $\tan 2\theta_p = -\dfrac{2I_{xy}}{I_x - I_y}$ 또는 $\tan 2\theta_p = \dfrac{2I_{xy}}{I_y - I_x}$