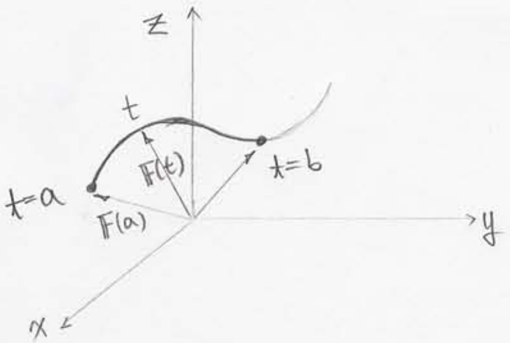
◎ 곡선 $\alpha : \underbrace{(a,b)}_{\text{interval} \subset \mathbb{R}} \to \mathbb{R}^3$ 은 단일변수 벡터 함수로 표현 가능

$$\boxed{\mathbb{F}(t) = x(t)\,\mathbb{i} + y(t)\,\mathbb{j} + z(t)\,\mathbb{k}}$$

◎ 단일변수 벡터함수의 연속 : $x(t), y(t), z(t)$ 가 각각 연속이면, $\mathbb{F}(t)$ 를 연속이라 함.

◎ 〃 〃 도함수 : $\boxed{\mathbb{F}'(t) = x'(t)\,\mathbb{i} + y'(t)\,\mathbb{j} + z'(t)\,\mathbb{k}}$



◦ 구간 $a \le t \le b$ 에서 곡선의 길이

$$L = \int_a^b \| \mathbb{F}'(t) \| \, dt$$

$$= \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} \, dt$$

◦ $t = a$ 부터 임의의 지점까지의 길이

$$\boxed{S(t) = \int_a^t \| \mathbb{F}'(\tau) \| \, d\tau}$$

$\mathbb{F}(t)$ 가 연속이면 $S(t)$는 미분 가능!

$$\frac{d}{dt} S(t) = \frac{d}{dt} \int_a^t \| \mathbb{F}(\tau) \| \, d\tau$$

즉, $\boxed{\dfrac{ds}{dt} = \| \mathbb{F}'(t) \|}$

◦ t에 대한 함수 $S(t)$는 $S(a) = 0$ 이고,

$S(b) = L$ 인 증가함수 → 역함수 존재.

$S(t)$ 의 역함수 $= t(s)$ 라 하자.

◦ 구간 $0 \le S \le L$ 에서의 S에 대한

단일변수 벡터함수 $\mathbb{G}(s)$를 정의

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbb{G}(s) &= \mathbb{F}(t(s)) \\ &= x(t(s))\,\mathbb{i} + y(t(s))\,\mathbb{j} + z(t(s))\,\mathbb{k} \end{aligned}}$$

$\mathbb{G}$와 $\mathbb{F}$는 동일 곡선의 위치 함수이다.

즉, $a \le t \le b$ 에서의 $\mathbb{F}(t)$는

$0 \le s \le L$ 에서의 $\mathbb{G}(s)$와 동일.

그러나, $\| \mathbb{G}' \| = 1$ 이라는 특징

$$\mathbb{G}'(s) = \frac{d}{ds} \mathbb{F}'(t(s)) = \frac{d}{dt} \mathbb{F}(t) \frac{dt}{ds}$$

$$= \frac{1}{ds/dt} \mathbb{F}'(t) = \frac{1}{\| \mathbb{F}'(t) \|} \cdot \mathbb{F}'(t)$$

http://vision.hanyang.ac.kr/~kkokkal/

- 미분기하 (Diff. Geometry) 입장에서,

곡선 $\alpha : (a,b) \to \mathbb{R}^3$ 과

함수 $h : (c,d) \to (a,b)$ 가 있을 때, ← 전단사 함수. 미분 가능

$\alpha \circ h$ 로 정의된 곡선 β 를

h 에의한 α 의 재매개화 (reparameterization)

라고 한다.

$$\beta = \alpha \circ h$$

- α 가 정칙 곡선이면 α 를 재매개화한 단위 속력 곡선 β 가 존재!

$$\beta(s) = \alpha(t(s))$$ ← t 는 역함수 $f : (c,d) \to (a,b)$.

proof) $\beta'(s) = \alpha'(t(s))\, t'(s)$

$$= \alpha'(t(s)) \frac{1}{s'(t(s))} = \alpha'(t(s)) \cdot \frac{1}{\| \alpha'(t(s)) \|}$$

ex) $\mathbb{F}(t) = a \cos t\, \mathbb{i} + a \cdot \sin t\, \mathbb{j} + bt\, \mathbb{k}$ $\quad (a > 0,\ b \neq 0)$ ← α 곡선

$\mathbb{F}'(t) = -a \sin t\, \mathbb{i} + a \cos t\, \mathbb{j} + b\, \mathbb{k}$

$\| \mathbb{F}'(t) \| = \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2}$

$= \sqrt{a^2 + b^2}$

$= c$

$s(t) = \int_0^t \| \mathbb{F}'(\tau) \| \, d\tau$

$= \int_0^t c \, d\tau$

$= ct.$ $\quad \therefore t = \frac{s}{c}$

$\therefore G(s) = \mathbb{F}(t(s))$

$= \mathbb{F}\left(\frac{s}{c}\right)$

$= a \cdot \cos \frac{s}{c}\, \mathbb{i} + a \sin \frac{s}{c}\, \mathbb{j} + b \cdot \frac{s}{c}\, \mathbb{k}$

β 곡선 : 단위 속력 재매개화 곡선.