1.2 순서체(Ordered field)

이 절에서는 체의 공리와 순서 공리를 소개함으로써, 우선 $\mathbb{R}$이 순서체임을 설명하고자 한다.

체의 공리 (field axiom)

A6. 임의의 $a,\ b \in \mathbb{R}$에 대하여 다음이 성립한다.

$a+b=b+a$ (덧셈에 대한 교환법칙, commutative law)

A7. 임의의 $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$에 대하여 다음이 성립한다.

$(a+b)+c=a+(b+c)$ (덧셈에 대한 결합법칙, associative law)

A8. 임의의 $a \in \mathbb{R}$에 대하여 $a+0=a$를 만족하는 $0 \in \mathbb{R}$이 존재한다. 이러한 0을 **영(zero)**라고 부르고, **덧셈에 대한 항등원(additive identity)**이라 한다.

A9. 각 $a \in \mathbb{R}$에 대하여 $a+(-a)=0$을 만족하는 $-a \in \mathbb{R}$이 존재한다. 이러한 $-a$를 **덧셈에 대한 a의 역원(additive inverse)**이라 한다.

A10. 임의의 $a,\ b \in \mathbb{R}$에 대하여 다음이 성립한다.

$a \times b=b \times a$ (곱셈에 대한 교환법칙, commutative law)

A11. 임의의 $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$에 대하여 다음이 성립한다.

$(a \times b) \times c=a \times (b \times c)$ (덧셈에 대한 결합법칙, associative law)

A12. 임의의 $a \in \mathbb{R}$에 대하여 $a \times 1=a$를 만족하는 $1 \in \mathbb{R}$이 존재한다. 이러한 1을 **영(zero)**라고 부르고, **곱셈에 대한 항등원(multiplicative identity)**이라 한다.

A13. 0이 아닌 각 $a \in \mathbb{R}$에 대하여 $a \times a^{-1}=1$을 만족하는 $a^{-1} \in \mathbb{R}$이 존재한다. 이러한 $a^{-1}(=\frac{1}{a})$을 **곱셈에 대한 a의 역원(additive inverse)**이라 한다.

A14. 임의의 $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$에 대하여 다음이 성립한다.

$a \times (b+c)=a \times b+a \times c$ (배분법칙, distribute law)

곱셈 기호 '×'는 보통 생략하거나 '·'로 나타내기도 한다.

<u>1.2.1 예제</u> (a)덧셈에 대한 항등원, (b)역원, (c)곱셈에 대한 항등원, (d)역원이 유일함을 보여라.

proof. (a) $0'$을 덧셈에 대한 항등원이라 하자. 그러면 $0=0+0'=0'+0=0'$. ■

(b) $(-a)'$이 덧셈에 대한 $a \in \mathbb{R}$의 역원이라 하자. 그러면,

$$(-a)'=(-a)'+0=(-a)'+\{a+(-a)\}=\{(-a)'+a\}+(-a)$$
$$=\{a+(-a)'\}+(-a)=0+(-a)=(-a)+0=-a.\ ■$$

(c), (d)는 연습문제로 남긴다. (a), (b)랑 비슷하거든.

<u>1.2.2 예제</u> 임의의 $a \in \mathbb{R}$에 대하여 $a \times 0=0$임을 보여라.

proof. $a+a \times 0=a \times 1+a \times 0=a \times (1+0)=a \times 1=a$. ■

<u>1.2.3 예제</u> 임의의 $a \in \mathbb{R}$에 대하여 $(-1) \times a=-a$임을 보여라.

proof. $a+(-1) \times a=a \times 1+(-1) \times a=a \times 1+a \times (-1)=a \times \{1+(-1)\}=a \times 0=0$. ■

순서공리 (ordered axiom)

A15. 임의의 $a,\ b\in\mathrm{R}$에 대하여 다음 세 가지의 경우 중 한 가지 경우만 성립한다.

$a>b$, $a=b$, $a<b$

A16. $a<b$이고 $b<c$인 $a,\ b,\ c\in\mathrm{R}$에 대하여 $a<b<c$가 성립한다.

A17. 임의의 $a,\ b,\ c\in\mathrm{R}$에 대하여 $a<b$이면 $a+c<b+c$가 성립한다.

A18. 임의의 $a,\ b\in\mathrm{R}$에 대하여 $a<b$이고 $c>0$이면 $ac<bc$이다.

실수 a는 $a\geq 0$일 때 '음이 아니다.(nonnegative)'라고 하며, $a>0$일 때 양(positive)이라고 한다.

1.2.4 예제 임의의 $a,\ b\in\mathrm{R}$에 대하여 $a<b$일 필요충분조건은 $-b<-a$임을 보여라.

proof. ($\Rightarrow$) $a<b$라 하자. 양 변에 $\{(-a)+(-b)\}$를 더하면 $a+\{(-a)+(-b)\}<b+\{(-a)+(-b)\}$.

이제 이것을 정리하면,

(좌변) : $a+\{(-a)+(-b)\}=\{a+(-a)\}+(-b)=0+(-b)=-b$,

(우변) : $b+\{(-a)+(-b)\}=b+\{(-b)+(-a)\}=\{b+(-b)\}+(-a)=0+(-a)=-a$.

($\Leftarrow$) $-b<-a$라 하자. 양 변에 $a+b$를 더하면 $-b+(a+b)<-a+(a+b)$.

이제 이것을 정리하면,

(좌변) : $-b+(a+b)=-b+(b+a)=(-b+b)+a=\{b+(-b)\}+a=0+a=a+0=a$,

(우변) : $-a+(a+b)=(-a+a)+b=\{a+(-a)\}+b=0+b=b+0=b$. ■

1.2.5 예제 임의의 $a,\ b,\ c\in\mathrm{R}$에 대하여 $a<b$이고 $c<0$이면 $ac>bc$임을 보여라.

proof. 1.2.4에 의하여 $-c>0$. 그런데 $a<b$이므로 $a(-c)<b(-c)$. 이제 이것을 정리하면,

(좌변) : $a(-c)=a\{(-1)c\}=\{a(-1)\}c=\{(-1)a\}c=(-1)\{ac\}=-(ac)$,

(우변) : $b(-c)=b\{(-1)c\}=\{b(-1)\}c=\{(-1)b\}c=(-1)\{bc\}=-(bc)$.

따라서 $-(ac)<-(bc)$. 그러므로 1.2.4에 의하여 $ac>bc$. ■

위 두 가지 공리, 즉 체의 공리와 순서 공리를 만족하는 수학적 대상들을 순서체(ordered field)라 부른다. 그러나 순서체의 성질이 실수들의 집합만이 가질 수 있는 성질들은 아니다. 유리수 집합 Q는 순서체이다.(보여라.)

1.2.6 예제 $-1(-1)=1$임을 보여라.

proof. $-1+(-1)(-1)=-1\times 1+(-1)(-1)=(-1)\{1+(-1)\}=-1\times 0=0$. ■

1.2.7 예제 $x\in\mathrm{R}$에 대하여 $1x=x$임을 보여라.

proof. $1x+(-x)=1x+(-1)x=\{1+(-1)\}x=0x=0$. ■

1.2.9 예제 $x \in \mathrm{R}$에 대하여 $\frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}$임을 보여라.

proof. $\frac{1}{x} + \frac{1}{-x} = \frac{-1}{-x} + \frac{1}{-x} = \frac{-1+1}{-x} = 0$. ■

1.2.10 예제 $x \in \mathrm{R}$에 대하여 $x < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} < 0$ 임을 보여라.

proof. $(\Rightarrow)$ $\frac{1}{x} > 0$이라 하자. $x < 0$이므로 양 변에 x를 곱하여 정리하면, $x \times \frac{1}{x} < x \times 0 \Rightarrow 1 < 0$.

$(\Leftarrow)$ $x > 0$이라 하자. $\frac{1}{x} < 0$이므로 양 변에 $\frac{1}{x}$을 곱하여 정리하면, $\frac{1}{x} \times x < \frac{1}{x} \times 0 \Rightarrow 1 < 0$. ■

위 1.2.10에서 x가 음수인 경우도 존나게 쉬우니 직접 증명해.

1.2.11 정의 절댓값(absolute valye) $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

1.2.12 정리 절댓값의 성질 $a,\ x,\ y \in \mathrm{R}$에 대하여,

(1) $|x| = |-x|$

(2) $y \neq 0$이면 $|\frac{1}{y}| = \frac{1}{|y|}$

(3) $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$

(4) $|xy| = |x||y|$

(5) $y \neq 0$이면 $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$

proof. (1) $x \geq 0$이라 하자. 그러면 $|-x| = -(-x) = (-1)\{(-1)x\} = \{(-1)(-1)\}x = 1x = x = |x|$. 이제 $x < 0$이라 하자. 그러면 $|-x| = -x = |x|$. ■

(2) $y > 0$이라 하자. 그러면 $\frac{1}{|y|} = \frac{1}{y} = |\frac{1}{y}|$. 이제 $y < 0$이라 하자. 그러면 $\frac{1}{|y|} = \frac{1}{-y} = -\frac{1}{y} = |\frac{1}{y}|$. ■

(3) $(\Rightarrow)$ $-|x| \leq x \leq |x|$. $|x| \leq a$이므로 $-|x| \geq -a$, 따라서 $-a \leq -|x| \leq x \leq |x| \leq a$, 즉 $-a \leq x \leq a$.

$(\Leftarrow)$ $x \geq 0$이라 하자. 그러면 $|x| = x \leq a$. 이제 $x \leq 0$이라 하자. 그러면 $|x| = -x \leq a$. ■

(4) 다음의 네 가지 경우로 나누어서 생각한다.

① $x \geq 0,\ y \geq 0$ 인 경우

$|xy| = xy = |x||y|$.

② $x \geq 0,\ y < 0$ 인 경우

$|xy| = -xy = x(-1)y = x\{(-1)y\} = |x||y|$.

③ $x < 0,\ y \geq 0$ 인 경우

$|xy| = -xy = (-x)y = |x||y|$.

④ $x < 0,\ y < 0$ 인 경우

$|xy| = xy = 1xy = (-1)(-1)xy = (-1)x(-1)y = |x||y|$. ■

<u>1.2.13 정리</u> $x,\ y \in \mathrm{R}$에 대하여, $||x|-|y|| \le |x+y| \le |x|+|y|$.

proof. $-|x| \le x \le |x|$와 $-|y| \le y \le |y|$를 변변 더하면 $-(|x|+|y|) \le x+y \le |x|+|y|$. 이제 1.2.12의 (3)을 적용하면, $|x+y| \le |x|+|y|$. 그러므로 $|x| = |x+y+(-y)| \le |x+y|+|-y| = |x+y|+|y|$, 즉 $|x|-|y| \le |x+y|$. 같은 방법으로, $|y| = |x+y+(-x)| \le |x+y|+|-x| = |x+y|+|x|$, 즉 $|y|-|x| \le |x+y|$. ■

<u>1.2.14 정리</u> 삼각부등식(triangle inequality)

$$n \in \mathrm{N}\text{에 대하여, } |x_1+x_2+x_3+\ \cdots\ +x_n| \le |x_1|+|x_2|+|x_3|+\ \cdots\ +|x_n|$$

proof. $|x_1+x_2| \le |x_1|+|x_2|$은 참이다. 이제 $|x_1+\ \cdots\ +x_n| \le |x_1|+\ \cdots\ +|x_n|$이 참이라고 가정하자. 그러면 $|(x_1+\ \cdots +x_n)+x_{n+1}| \le |x_1+\ \cdots +x_n|+|x_{n+1}| \le |x_1|+\ \cdots +|x_n|+|x_{n+1}|$. ■

≪연습문제≫

1. x, y, and $z \in \mathbb{R}$에 대하여 다음을 증명하여라.
   (a) $-(-x)=x$
   (b) $(-x)\times(-y)=x\times y$
   (c) $x \neq 0$이면 $x^2>0$
   (d) $x\times z=y\times z$이고 $z\neq 0$이면 $x=y$
   (e) $0<1$
   (f) $x>0$, $y>0$이면 $x\times y>0$
   (g) $x\geq 0$, $y\geq 0$이면 $x\times y\geq 0$
   (h) 임의의 $n\in\mathbb{N}$에 대하여 $0<x<y$이면 $x^n<y^n$

2. $|x+y|=|x|+|y| \Leftrightarrow xy\geq 0$.

3. 다음을 증명하여라.
   (a) $0<c<1$이면 $0<c^2<c<1$.
   (b) $1<c$이면 $1<c<c^2$.

4. a, $b\in\mathbb{R}$에 대하여 기호 max와 min을 $\begin{cases} a\geq b \Rightarrow \max\{a,\ b\}=a \\ a\leq b \Rightarrow \min\{a,\ b\}=b \end{cases}$ 과 같이 정의하자. 다음을 보여라.
   (a) $\max\{a,\ b\}=\dfrac{\{a+b+|a-b|\}}{2}$
   (b) $\min\{a,\ b\}=\dfrac{\{a+b-|a-b|\}}{2}$

5. $P=\{x \mid x>0,\ x\in\mathbb{R}\}$라 하자. 다음을 보여라.
   (a) x, $y\in P$이면 $(x+y)\in P$이고 $x\times y\in P$.
   (b) 임의의 $x\in\mathbb{R}$에 대하여, $x\in P$, $-x\in P$ 그리고 $x=0$ 중 어느 하나만이 성립한다.

≪연습문제 해설≫

1. x, y, and $z \in \mathbb{R}$에 대하여 다음을 증명하여라.

(a) $-(-x)=x$

(b) $(-x)\times(-y)=x\times y$

(c) $x \neq 0$이면 $x^2>0$

(d) $x\times z=y\times z$이고 $z\neq 0$이면 $x=y$

(e) $0<1$

(f) $x>0$, $y>0$이면 $x\times y>0$

(g) $x\geq 0$, $y\geq 0$이면 $x\times y\geq 0$

(h) 임의의 $n\in\mathbb{N}$에 대하여 $0<x<y$이면 $x^n<y^n$

proof. (a) $-(-x)+(-x)=-1(-x)+(-x)=-1(-x)+1(-x)=(-1+1)(-x)=0(-x)=0$. ■

(b) $(-x)\times(-y)=(-1x)\times(-1y)=(-1)x\times(-1y)=(-1)\{x\times(-1y)\}=(-1)(-xy)=-(-xy)=xy$. ■

(c) $x>0$이면 A18로부터 자명하다. $x<0$이라 하자. 양 변에 x를 곱하면 $x\times x=x^2>0\times x=0$. ■

(d) $x\neq y$라 하자. $x\times z=y\times z$의 양 변에 $\frac{1}{z}$를 곱하여 정리하면,

$$(x\times z)\times\frac{1}{z}=x\times(z\times\frac{1}{z})=x=(y\times z)\times\frac{1}{z}=y\times(z\times\frac{1}{z})=y,\ \text{즉}\ x=y.\ ■$$

(e) $0\neq 1$. $0>1$이라 하자. 양 변에 -1을 더하면 $-1>0\cdots(*)$. $-1>0$이므로 (*)의 양 변에 -1을 곱하여도 부등호의 방향은 바뀌지 않는다. (*)의 양 변에 -1을 곱하면, $(-1)\times(-1)>0\times(-1)$, 즉 $1>0$. ■

(f), (g)는 심심할 때 혼자서 생각해봐. 공리와 어떤 예제로부터 자명하니까.

(h) 문제에서 $x<y$. $x^n<y^n\cdots(**)$이라 하자. $0<x<y$이므로 $xy>0$. 따라서 (**)의 양 변에 xy를 곱하면 $x^{n+1}y<y^{n+1}x\cdots(***)$. 이제 (***)의 양 변을 $y>0$으로 나누면, $x^{n+1}<y^{n+1}\times\frac{x}{y}$. 그런데 $y>x$이므로 $1>\frac{x}{y}>0$. 따라서 $x^{n+1}<y^{n+1}\times\frac{x}{y}<y^{n+1}\times 1=y^{n+1}$. ■

2. $|x+y|=|x|+|y| \Leftrightarrow xy\geq 0$.

proof. $xy=0$인 경우는 쉬우므로 생략한다. $xy\neq 0$이라 하자.

($\Leftarrow$) $x>0$이고 $y>0$이면, $|x+y|=x+y=|x|+|y|$.

반대로, $x<0$이고 $y<0$이면 $|x+y|=-(x+y)=-x+(-y)=|x|+|y|$.

($\Rightarrow$) $xy<0$이라 하자. $x>0$이고 $y<0$라 해도 상관없다.

그러면, $|x+y|^2=(x+y)^2=x^2+2xy+y^2=|x|^2-2|x||y|+|y|^2=(|x|-|y|)^2$, 즉 $|x+y|=|x|+|y|=|x|-|y|$.

따라서 $|x|+|y|=|x|-|y|$ 이고, 이것은 $-y=y$ 이 성립한다는 뜻이므로 모순이다. ($\because$ $y\neq 0$) ■

3. 다음을 증명하여라.

(a) $0<c<1$이면 $0<c^2<c<1$.

(b) $1<c$이면 $1<c<c^2$.

proof. (a) $c<1$의 양 변에 $c>0$을 곱하면 $c\times c=c^2<1\times c=c$, 즉 $c^2<c$. 마찬가지로 $0<c$의 양 변에 $c>0$을 곱하면 $0\times c=0<c\times c=c^2$. 따라서 $0<c^2<c<1$. ■

(b) $1<c$의 양 변에 $c>0$을 곱하면 $1\times c=c<c\times c=c^2$. 따라서 $1<c<c^2$. ■

4. $a,\ b \in \mathbf{R}$에 대하여 기호 max와 min을 $\begin{cases} a \geq b \Rightarrow \max\{a,\ b\} = a \\ a \leq b \Rightarrow \min\{a,\ b\} = b \end{cases}$ 과 같이 정의하자. 다음을 보여라.

(a) $\max\{a,\ b\} = \dfrac{\{a+b+|a-b|\}}{2}$

(b) $\min\{a,\ b\} = \dfrac{\{a+b-|a-b|\}}{2}$

proof. (a) $a \geq b$라 하면 $a-b \geq 0$이므로 $\dfrac{\{a+b+|a-b|\}}{2} = \dfrac{\{a+b+a-b\}}{2} = \dfrac{2a}{2} = a$. 만일 $a < b$라 하면 $a-b < 0$이므로 $\dfrac{\{a+b+|a-b|\}}{2} = \dfrac{\{a+b-a+b\}}{2} = \dfrac{2b}{2} = b$. ■

(b) $a \leq b$라 하면 $a-b \leq 0$이므로 $\dfrac{\{a+b-|a-b|\}}{2} = \dfrac{\{a+b+a-b\}}{2} = \dfrac{2a}{2} = a$. 만일 $a > b$라 하면 $a-b > 0$이므로 $\dfrac{\{a+b-|a-b|\}}{2} = \dfrac{\{a+b-a+b\}}{2} = \dfrac{2b}{2} = b$. ■

5. $P = \{x \mid x > 0,\ x \in \mathbf{R}\}$라 하자. 다음을 보여라.

(a) $x,\ y \in P$이면 $(x+y) \in P$이고 $x \times y \in P$.

(b) 임의의 $x \in \mathbf{R}$에 대하여, $x \in P$, $-x \in P$ 그리고 $x = 0$ 중 어느 하나만이 성립한다.

proof. (a) $x,\ y \in P$이므로, $x > 0$ 그리고 $y > 0$. 따라서 $x > 0$의 양 변에 $y > 0$을 더하면 $x + y > y$. 그런데 $y > 0$이므로 $x + y > y > 0$. 따라서 $(x+y) \in P$. 마찬가지 방법으로 $x \times y \in P$임도 증명할 수 있다. ■

(b) A15에 의해 임의의 $x \in \mathbf{R}$에 대하여 $x > 0$, $x = 0$, $x < 0$ 중 어느 하나만이 성립한다. 따라서 만일 $x > 0$이면 $x \in P$, $x < 0$이면 $-x > 0$이므로 $-x \in P$. ■