2008학년도 10월 고3 전국연합학력평가 문제지

제 2 교시

수 리 영 역

'나'형　　**성명** ______　　**수험번호** ☐☐☐☐☐ 3 ☐☐☐☐

- 먼저 수험생이 선택한 응시 유형의 문제지인지 확인하시오.
- 문제지에 성명과 수험 번호를 정확히 기입하시오.
- 답안지에 수험 번호, 응시 유형 및 답을 표기할 때는 반드시 '수험생이 지켜야 할 일'에 따라 표기하시오.
- 단답형 답의 숫자에 0이 포함된 경우, 0을 OMR 답안지에 반드시 표기해야 합니다.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
- 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

---

1. $2^{-\frac{1}{3}} \times 4^{\frac{2}{3}}$의 값은? [2점]

① 1　② $\sqrt{2}$　③ 2　④ $2\sqrt{2}$　⑤ 4

2. 두 행렬 A, B에 대하여 $A+B=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, $A-B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$가 성립할 때, 행렬 AB의 모든 성분의 합은? [2점]

① 24　② 28　③ 32　④ 36　⑤ 40

3. 서로 독립인 두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{5}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{2}{5}$일 때, $\mathrm{P}(A \cup B)$의 값은? [2점]

① $\frac{11}{25}$　② $\frac{12}{25}$　③ $\frac{13}{25}$　④ $\frac{14}{25}$　⑤ $\frac{3}{5}$

4. 수열 $\{a_n\}$을 다음과 같이 정의하자.

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} 10^{k-1} \quad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

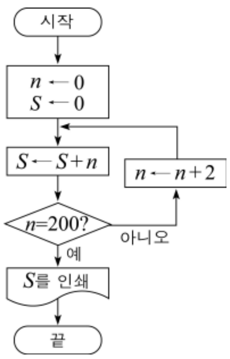
a_n을 3으로 나눈 나머지를 b_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{30} b_n$의 값은? [3점]

① 30　② 31　③ 32　④ 33　⑤ 34

5. 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던져서 나온 두 눈의 수의 곱이 짝수일 때, 나온 두 눈의 수의 합이 6 또는 8일 확률은? [3점]

① $\frac{2}{27}$ ② $\frac{5}{27}$ ③ $\frac{8}{27}$ ④ $\frac{11}{27}$ ⑤ $\frac{14}{27}$

6. 다음 순서도에서 인쇄되는 S의 값은? [3점]



① 5050 ② 7540 ③ 9900
④ 10100 ⑤ 20200

7. $\left(x+\frac{1}{x^n}\right)^{10}$의 전개식에서 상수항이 존재하도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합은? [3점]

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

8. 어떤 특산품 과일을 재배하는 과수원에서는 해마다 수확량의 일부를 해외로 수출한다. 이 과수원에서 올해 수확한 과일 30000개의 무게는 평균 400g, 표준편차 20g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 30000개의 과일 중 무게가 400g 이상이고 440g 이하인 과일을 선별하여 수출하였다. 이 과수원에서 올해 수출한 과일의 개수를 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.34
1.5	0.43
2.0	0.48
2.5	0.49

① 10200 ② 11600 ③ 12900
④ 14400 ⑤ 14700

9. 집합 P를

$$P=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

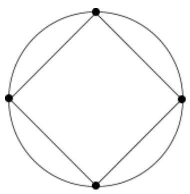
이라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.) [4점]

< 보 기 >

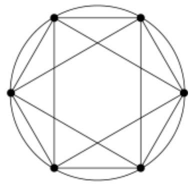
ㄱ. 집합 $\{X \mid X^2=E,\ X\in P\}$의 원소의 개수는 2이다.
ㄴ. $X\in P$이면 $X^3=X$이다.
ㄷ. 집합 P는 곱셈에 대하여 닫혀 있다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

10. 원에 내접하는 정 n각형의 꼭짓점 중에서 서로 다른 4개의 점을 연결하여 만든 직사각형의 개수를 a_n이라 하자. 예를 들어 $a_4=1$, $a_6=3$이다. $\sum_{k=2}^{20} a_{2k}$의 값은? [4점]



$a_4=1$



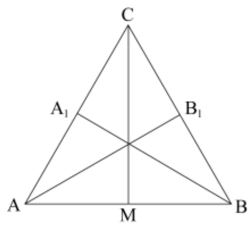
$a_6=3$

① 960　② 1020　③ 1140　④ 1235　⑤ 1330

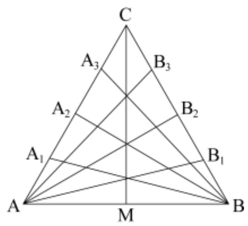
11. 정삼각형 ABC에서 변 AC를 $(n+1)$등분한 점을 각각 A_1, A_2, A_3, $\cdots$, A_n이라 하고, 변 BC를 $(n+1)$등분한 점을 각각 B_1, B_2, B_3, $\cdots$, B_n이라 하자. 다음 [단계]와 같은 순서로 선분을 긋는다.

[단계 1] 꼭짓점 C와 선분 AB의 중점 M을 연결한 선분 $\overline{\mathrm{CM}}$을 긋는다.
[단계 2] 꼭짓점 A와 점 B_1, B_2, B_3, $\cdots$, B_n을 각각 연결한 선분 $\overline{\mathrm{AB}_1}$, $\overline{\mathrm{AB}_2}$, $\overline{\mathrm{AB}_3}$, $\cdots$, $\overline{\mathrm{AB}_n}$을 긋는다.
[단계 3] 꼭짓점 B와 점 A_1, A_2, A_3, $\cdots$, A_n을 각각 연결한 선분 $\overline{\mathrm{BA}_1}$, $\overline{\mathrm{BA}_2}$, $\overline{\mathrm{BA}_3}$, $\cdots$, $\overline{\mathrm{BA}_n}$을 긋는다.

이때, 나누어진 정삼각형 ABC의 내부 영역의 개수를 a_n이라 하자. 예를 들어 $a_1=6$, $a_3=20$이다. a_{10}의 값은? [4점]



$a_1=6$



$a_3=20$

① 132　② 136　③ 140　④ 144　⑤ 148

수 리 영 역

'나'형

12. 이차정사각행렬 A에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이고 O는 영행렬이다.) [3점]

< 보 기 >

ㄱ. $A^2-4A-E=O$이면 A의 역행렬은 $A-4E$이다.

ㄴ. $A^2-A=O$이면 A의 역행렬은 존재하지 않는다.

ㄷ. A^3의 역행렬이 존재하지 않으면 A^2의 역행렬은 존재하지 않는다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

13. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1=1$, $a_n+a_{n+1}=3$ ($n=1, 2, 3, \cdots$)을 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

ㄱ. $a_{11}=1$

ㄴ. $\lim_{n\to\infty} a_{2n}=2$

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{3}{2}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

14. 다음은 n이 소수일 때, ${}_{2n}\mathrm{C}_n-2$는 n^2의 배수임을 증명한 것이다.

<증명>

$(1+x)^{2n}=\sum_{k=0}^{2n}{}_{2n}\mathrm{C}_k x^k$

에서 $\boxed{(가)}$ 의 계수는 ${}_{2n}\mathrm{C}_n$이다.

한편 $(1+x)^n(1+x)^n=\left(\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_{n-k}x^{n-k}\right)$

에서 $\boxed{(가)}$ 의 계수는 $\sum_{k=0}^{n}\left({}_n\mathrm{C}_k\cdot\boxed{(나)}\right)$ 이다.

따라서 ${}_{2n}\mathrm{C}_n=({}_n\mathrm{C}_0)^2+({}_n\mathrm{C}_1)^2+({}_n\mathrm{C}_2)^2+\cdots+({}_n\mathrm{C}_n)^2$이다.

그런데 n이 소수이므로 $\boxed{(다)}$ 인 자연수 k에 대하여 ${}_n\mathrm{C}_k$는 n의 배수이다.

따라서 $\boxed{(다)}$ 인 자연수 k에 대하여 $({}_n\mathrm{C}_k)^2$은 n^2의 배수이고 ${}_n\mathrm{C}_0={}_n\mathrm{C}_n=1$이므로 ${}_{2n}\mathrm{C}_n-2$는 n^2의 배수이다.

위 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [3점]

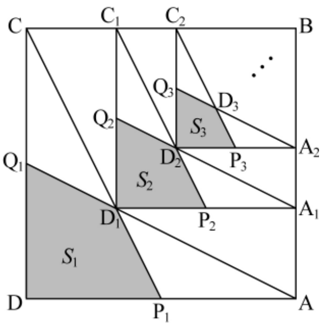
	(가)	(나)	(다)
①	x^n	${}_n\mathrm{C}_{n-k}$	$1\le k\le n$
②	x^n	${}_n\mathrm{C}_{n-k}$	$1\le k\le n-1$
③	x^n	${}_{2n}\mathrm{C}_{n-k}$	$1\le k\le n$
④	x^{2n}	${}_n\mathrm{C}_{n-k}$	$1\le k\le n-1$
⑤	x^{2n}	${}_{2n}\mathrm{C}_{n-k}$	$1\le k\le n$

15. 한 변의 길이가 4인 정사각형 ABCD가 있다. 그림과 같이 두 선분 AD, DC의 중점을 각각 $\mathrm{P_1}$, $\mathrm{Q_1}$이라 하고, 두 선분 $\mathrm{AQ_1}$, $\mathrm{CP_1}$의 교점을 $\mathrm{D_1}$이라 하자. 이때, 사각형 $\mathrm{DP_1D_1Q_1}$의 넓이를 S_1이라 하자.

선분 $\mathrm{BD_1}$을 대각선으로 하는 정사각형을 $\mathrm{BC_1D_1A_1}$이라 하자. 두 선분 $\mathrm{A_1D_1}$, $\mathrm{D_1C_1}$의 중점을 각각 $\mathrm{P_2}$, $\mathrm{Q_2}$라 하고, 두 선분 $\mathrm{A_1Q_2}$, $\mathrm{C_1P_2}$의 교점을 $\mathrm{D_2}$라 하자. 이때, 사각형 $\mathrm{D_1P_2D_2Q_2}$의 넓이를 S_2라 하자.

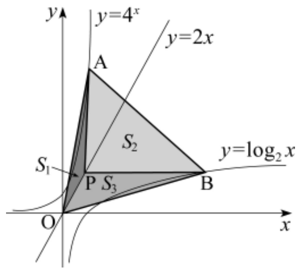
선분 $\mathrm{BD_2}$를 대각선으로 하는 정사각형을 $\mathrm{BC_2D_2A_2}$라 하자. 두 선분 $\mathrm{A_2D_2}$, $\mathrm{D_2C_2}$의 중점을 각각 $\mathrm{P_3}$, $\mathrm{Q_3}$이라 하고, 두 선분 $\mathrm{A_2Q_3}$, $\mathrm{C_2P_3}$의 교점을 $\mathrm{D_3}$이라 하자. 이때, 사각형 $\mathrm{D_2P_3D_3Q_3}$의 넓이를 S_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 얻은 n번째 사각형의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [4점]



① $\frac{24}{5}$ ② $\frac{16}{3}$ ③ $\frac{27}{5}$ ④ $\frac{20}{3}$ ⑤ $\frac{36}{5}$

16. 제1사분면에서 직선 $y=2x$ 위의 한 점 P를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=4^x$과 만나는 점을 A라 하고, 점 P를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 점을 B라 하자. 이때, 세 삼각형 OPA, PAB, OPB의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3이라 하자. $S_1:S_2:S_3=3:k:7$일 때, 상수 k의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]



① 17 ② 18 ③ 19 ④ 20 ⑤ 21

17. 어떤 생물의 개체수를 측정하기 시작하여 시각 t에서의 개체수를 $N(t)$라 할 때, 다음 관계식이 성립한다고 한다.

$$N(t)=\frac{K}{1+c\cdot a^{-bt}} \quad (\text{단, } a, b, c\text{는 양의 상수})$$

이때, K는 이 생물의 최대개체량이다.

이 생물의 개체수를 측정하기 시작하여 $t=5$일 때의 개체수는 최대개체량의 $\frac{1}{2}$이었고, $t=7$일 때의 개체수는 최대개체량의 $\frac{3}{4}$이었다. 이 생물의 개체수를 측정하기 시작하여 $t=9$일 때의 개체수를 나타내는 것은? [4점]

① $\frac{6}{7}K$ ② $\frac{7}{8}K$ ③ $\frac{8}{9}K$
④ $\frac{9}{10}K$ ⑤ $\frac{10}{11}K$

단답형(18~25)

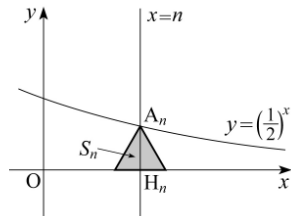
18. 로그부등식 $\log_{\frac{1}{2}}(x-2) > -3$의 해가 $\alpha < x < \beta$일 때, $\alpha+\beta$의 값을 구하시오. [3점]

19. $0 \le x \le 3$에서 함수 $f(x)=2^{-x^2+4x+a}$의 최솟값이 4일 때, $f(x)$의 최댓값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [3점]

20. 정수 a, b, c에 대하여 행렬 A를 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & c \end{pmatrix}$라 하자.

$|b| \le 100$일 때, $A=A^{-1}$을 만족하는 행렬 A의 개수를 구하시오. [4점]

21. 그림과 같이 직선 $x=n$ ($n=1, 2, 3, \cdots$)이 지수함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프 및 x축과 만나는 점을 각각 A_n, H_n이라 하자. 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{H}_n$을 높이로 하는 정삼각형의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n = a$이다. $\frac{1}{a^2}$의 값을 구하시오. [4점]



22. 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(3, p)$를 따르고 확률변수 Y는 이항분포 $\mathrm{B}(4, 2p)$를 따른다고 한다. 이때, $10\,\mathrm{P}(X=3)=\mathrm{P}(Y \ge 3)$을 만족시키는 양수 p의 값은 $\frac{n}{m}$이다. $m+n$의 값을 구하시오. (단, m, n은 서로소인 자연수이다.) [3점]

수 리 영 역

'나'형

23. 갑, 을 두 사람이 어떤 게임을 해서 다음과 같은 규칙에 따라 사탕을 갖는다고 한다.

(가) 이긴 사람은 3개, 진 사람은 1개의 사탕을 갖는다. (나) 비기면 두 사람이 각각 2개씩 사탕을 갖는다.

갑, 을 두 사람이 이 게임을 다섯 번 해서 20개의 사탕을 10개씩 나누어 갖게 되는 경우의 수를 구하시오. (단, 사탕은 서로 구별되지 않는다.) [3점]

24. 수열 $\{a_n\}$에서

$$a_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} \quad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

일 때, $30a_{30}-(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{29})$의 값을 구하시오. [4점]

25. 행렬 $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}^{50}$의 $(2, 1)$성분이 3^n일 때, n의 값을 구하시오. [4점]

5지 선다형

26. 함수 $f(x)$를 $f(x)=\log x-[\log x]$라 하자. $10<a<100$인 실수 a에 대하여 $\{f(a)\}^2+\left\{f\left(\frac{1}{a}\right)\right\}^2$의 최솟값은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{3}{2}$

수 리 영 역

'나'형

27. 첫째항이 $a\,(a\neq 0)$이고 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$이 임의의 자연수 m, n에 대하여

$$a_m + a_n = a_{m+n}$$

을 만족시킨다. $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값을 나타내는 것은? [3점]

① $25a$ ② $35a$ ③ $45a$
④ $55a$ ⑤ $65a$

28. 어떤 인터넷 사이트의 회원인 철수는 자신의 회원번호를 이용하여 다음과 같은 규칙에 따라 4자리 자연수인 비밀번호를 만들려고 한다.

> (가) 각 자리의 숫자는 모두 다르다.
> (나) 회원번호의 각 자리에 쓰인 숫자와 0은 사용할 수 없다.
> (다) 회원번호가 나타내는 수보다 큰 4의 배수이다.

철수의 회원번호가 6549일 때, 만들 수 있는 서로 다른 비밀번호의 개수는? [3점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

29. 음이 아닌 정수 n에 대하여 집합 A_n, B_n을 각각

$$A_n = \left\{ x \,\middle|\, n \le x < n + \frac{1}{2} \right\}$$

$$B_n = \left\{ x \,\middle|\, n + \frac{1}{2} \le x < n + 1 \right\}$$

이라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

> < 보 기 >
> ㄱ. $\log_2 5 \in A_2$
> ㄴ. $\log_2 a \in A_1$이면 $\log_2 5a \in A_3$이다.
> ㄷ. $\log_2 a \in B_{10}$이면 $\log_2 \sqrt{a} \in A_5$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

단답형(30)

30. 집합 X를

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b, c, d\text{는 } 3 \text{ 이하의 자연수} \right\}$$

라 하자. 집합 X에서 임의로 하나의 행렬을 선택할 때, 그 행렬이 역행렬을 가질 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

> ※ 확인 사항
> 문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.