

제 2 교시

수리 영역 (가형)

성명		수험번호						3			
----	--	------	--	--	--	--	--	---	--	--	--

- 자신이 선택한 유형('가'형 / '나'형)의 문제지인지 확인하시오.
- 문제지에 성명과 수험번호를 정확히 써 넣으시오.
- 답안지에 성명과 수험번호를 써 넣고, 또 수험번호와 답을 정확히 표시하시오.
- 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
- 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

1. $(\log_2 16) \times \sqrt[3]{64}$ 의 값은? [2 점]

- ① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

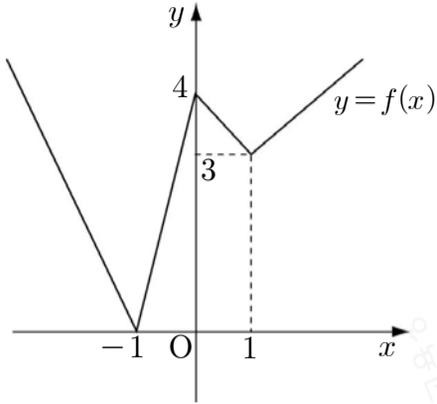
2. 분수방정식 $\frac{1}{x} + \frac{2}{x+1} = 2$ 의 모든 근의 합은? [2 점]

- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

3. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{\sqrt{t^2+4}-2}$ 의 값은? [2 점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

4. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때,
무리방정식 $f(x)=1+\sqrt{3f(x)-5}$ 의 실근의 개수는? [3점]



- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

5. 모든 실수 x 에 대하여 연속인 함수 $f(x)$ 는
 $f(x+4)=f(x)$
를 만족시키고, 폐구간 $[0, 4]$ 에서 다음과 같이 정의된다.

$$f(x)=\begin{cases} 3x & (0 \leq x < 1) \\ x^2+ax+b & (1 \leq x \leq 4) \end{cases}$$

이 때, $f(10)$ 의 값은? [3점]

- ① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

6. 다항함수 $f(x)$ 가 다음 두 조건을 만족할 때, $f(0)$ 의 값은?
[3점]

I. $\int f(x)dx = \{f(x)\}^2$
II. $\int_{-1}^1 f(x)dx = 50$

- ① 21 ② 22 ③ 23 ④ 24 ⑤ 25

7. 어느 공장에서 생산되는 전지의 수명이 평균 200시간, 표준 편차 5시간인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공장에서 생산된 전지 중에서 100 개를 임의 추출한 표본의 평균 수명이 201시간 이상일 확률을 주어진 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3 점]

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

- ① 0.0062 ② 0.0228 ③ 0.0668
- ④ 0.1587 ⑤ 0.1990

8. 최근에 상품을 개발한 어느 회사에서 상품에 대한 평가단으로 남자 300명, 여자 200명을 선정하였다. 이 평가단이 상품에 대한 평가를 한 결과 남자 중에서 60%, 여자 중에서 50%가 긍정적인 평가를 하였다. 상품 평가단 500명 중에서 임의로 선택한 사람이 상품에 대해 긍정적인 평가를 하였을 때, 이 사람이 남자일 확률은? [3 점]

- ① $\frac{3}{7}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{4}{7}$ ④ $\frac{9}{14}$ ⑤ $\frac{5}{7}$

14. 다음은 $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여

$$\left(1 + \frac{1}{1^3}\right)\left(1 + \frac{1}{2^3}\right)\left(1 + \frac{1}{3^3}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{n^3}\right) < 3 - \frac{1}{n} \cdots \textcircled{㉠}$$

이 성립함을 수학적귀납법으로 증명하는 과정이다.

<증명>

(i) $n = 2$ 일 때

$$(\text{좌변}) = \left(1 + \frac{1}{1^3}\right)\left(1 + \frac{1}{2^3}\right) = \frac{9}{4}, (\text{우변}) = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

이므로 $\textcircled{㉠}$ 이 성립한다.

(ii) $n = k$ ($k \geq 2$) 일 때 $\textcircled{㉠}$ 이 성립한다고 가정하면

$$\left(1 + \frac{1}{1^3}\right)\left(1 + \frac{1}{2^3}\right)\left(1 + \frac{1}{3^3}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{k^3}\right) < 3 - \frac{1}{k} \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉡}$ 의 양변에 $\boxed{\text{(가)}}$ 를 곱하면

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{1^3}\right)\left(1 + \frac{1}{2^3}\right)\left(1 + \frac{1}{3^3}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{k^3}\right) & \left(\boxed{\text{(가)}}\right) \\ & < \left(3 - \frac{1}{k}\right) \left(\boxed{\text{(가)}}\right) \cdots \textcircled{㉢} \end{aligned}$$

$\textcircled{㉢}$ 의 우변을 정리하면

$$(\text{우변}) = 3 - \frac{\boxed{\text{(나)}}}{k(k+1)^3}$$

$$\text{이 때, } \frac{\boxed{\text{(나)}}}{k(k+1)^3} - \frac{1}{k+1} \boxed{\text{(다)}} > 0$$

따라서 $n = k+1$ 일 때도 $\textcircled{㉠}$ 이 성립한다.

그러므로 (i), (ii)에 의하여 $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 부등식은 성립한다.

위의 증명 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [4 점]

- | | (가) | (나) | (다) |
|---|-------------------------|------------------|-----|
| ① | $1 + \frac{1}{(k+1)^3}$ | $k^3 + 3k^2 + 2$ | < |
| ② | $1 + \frac{1}{(k+1)^3}$ | $k^3 + 3k^2 + 2$ | > |
| ③ | $1 + \frac{1}{(k+1)^3}$ | $k^3 - 3k^2 + 2$ | < |
| ④ | $\frac{1}{(k+1)^3}$ | $k^3 - 3k^2 + 2$ | > |
| ⑤ | $\frac{1}{(k+1)^3}$ | $k^3 - 3k^2 + 2$ | < |

15. 함수 $y = f(x)$ 위의 임의의 점 $P(a, b)$ 와 $y = f(x)$ 의 역함수

$y = f^{-1}(x)$ 위의 임의의 점 $Q(c, d)$ 로 행렬 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 를

만든다. 다음 함수로 행렬 A 를 만들 때, 역행렬 A^{-1} 이 항상 존재하는 것은? [4 점]

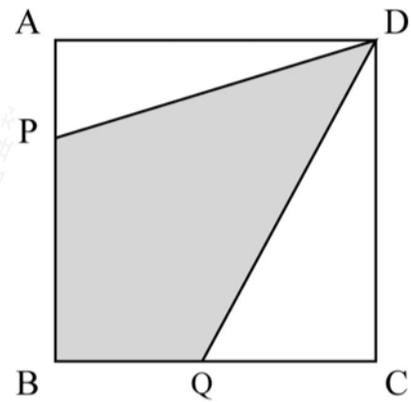
- ① $y = x + 1$ ② $y = \log x$ ③ $y = 2^x$
 ④ $y = \sqrt{x-1}$ ⑤ $y = \frac{1}{x}$

단답형(18 ~ 25)

18. 함수 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 20$ 의 극솟값을 구하시오. [3점]

19. 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f'(x) = (x-1)^3$ 이다. 함수 $f(x)$ 의 극값을 M , 함수 $y = f(x)$ 의 그래프 위의 두 점 $A(0, f(0))$, $B(2, f(2))$ 에서 접하는 두 접선의 교점의 y 좌표를 N 이라 할 때, $16(M-N)$ 의 값을 구하시오. [3점]

20. 그림과 같이 한 변의 길이가 20인 정사각형 ABCD에서 점 P는 A에서 출발하여 변 AB위를 매초 2씩 움직여 B까지, 점 Q는 B에서 P와 동시에 출발하여 변 BC위를 매초 3씩 움직여 C까지 간다. 이 때, 사각형 DPBQ의 넓이가 정사각형 ABCD의 넓이의 $\frac{11}{20}$ 이 되는 순간의 삼각형 PBQ의 넓이의 시간(초)에 대한 순간변화율을 구하시오. [3점]



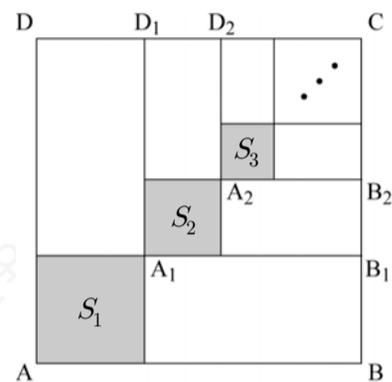
21. 주머니 A에 들어 있는 크기가 같은 흰 공 7개를 주머니 B로 모두 옮겨 담으려고 한다. 한 번에 한 개 또는 두 개씩 꺼내어 옮겨 담는 경우의 수를 구하시오. [4 점]

23. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD에서 선분 AB와 선분 AD를 각각 $m:n$ 으로 내분하는 점을 지나는 두 직선을 그어 만들어지는 4개의 사각형 중 아랫부분 정사각형의 넓이를 S_1 , 윗부분의 정사각형을 $A_1B_1CD_1$ 이라 하자.

다시 정사각형 $A_1B_1CD_1$ 에서 선분 A_1B_1 과 선분 A_1D_1 을 각각 $m:n$ 으로 내분하는 점을 지나는 두 직선을 그어 만들어지는 4개의 사각형 중 아랫부분 정사각형의 넓이를 S_2 , 윗부분의 정사각형을 $A_2B_2CD_2$ 라 하자.

이와 같은 시행을 무한히 반복할 때, $\sum_{k=1}^{\infty} S_k = \frac{1}{7}$ 이다.

m^2+n^2 의 값을 구하시오. (단, m, n 은 서로소인 자연수) [4 점]



22. 두 집합

$$A = \{x \mid (x-2)(x-4)(x+1)^2 < 0\}, B = \left\{x \mid \frac{(x+1)^3}{x-a} > 0\right\}$$

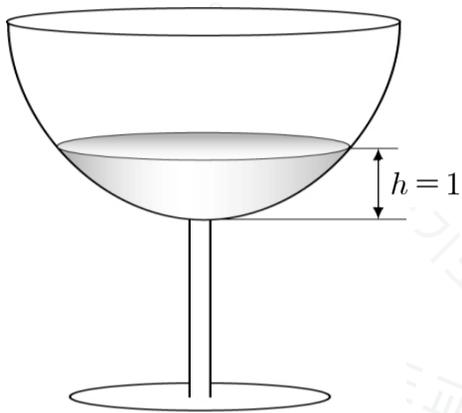
에 대하여 $A \subset B$ 일 때, 상수 a 의 최댓값을 M이라 하자. $7M$ 의 값을 구하시오. [3 점]

24. 곡선 $y = x^2 (0 \leq x \leq \sqrt{5})$ 을 y 축을 둘레로 회전시켜 만든 모양의 컵에 물이 들어 있다.

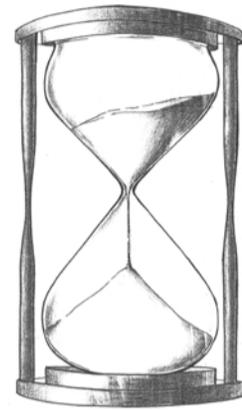
손가락으로 컵의 테두리를 일정한 속도로 문지를 때 생기는 소리의 공명주파수 f 와 컵의 바닥으로부터 물의 높이 h 의 관계는 다음과 같다.

$$f = \frac{a}{4(5-h)} \quad (\text{단, } a \text{ 는 상수})$$

그림과 같이 물의 높이 $h=1$ 일 때, 공명주파수가 k 이다. 공명주파수 $2k$ 를 얻기 위해서 이 컵에 더 부어야 하는 물의 양을 V 라 할 때, $\frac{5V}{\pi}$ 의 값을 구하시오. (단, 컵의 두께는 무시한다.) [4점]



25. 모래시계 A, B, C 에 들어 있는 모래의 양은 각각 $3^a, 9^b, 27^c$ 이고 매 초당 모래가 위에서 아래로 일정하게 떨어지는 양은 각각 a, b, c 이다. a, b, c 는 이 순서대로 등비수열을 이루고, $3^a, 9^b, 27^c$ 도 이 순서대로 등비수열을 이루며, 두 수열의 공비는 같다. 모래시계 A, B, C 로 쥘 수 있는 시간(초)을 각각 t_A, t_B, t_C 라 할 때, $t_A + t_B + t_C$ 의 값을 구하시오. (단, 모래가 다 떨어진 후 뒤집지 않는다.) [4 점]



26번부터 30번까지는 선택과목 문항입니다. 선택한 과목의 문제를 풀기 바랍니다.

미분과 적분

26. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x^2 - x}$ 의 값은? [3점]

- ① $-\frac{1}{2}$ ② -1 ③ $-\frac{3}{2}$ ④ -2 ⑤ $-\frac{5}{2}$

27. 함수 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x - a}{x - \frac{\pi}{2}} & (x \neq \frac{\pi}{2}) \\ b & (x = \frac{\pi}{2}) \end{cases}$ 가 $x = \frac{\pi}{2}$ 에서 연속일

때, 상수 a, b 의 합 $a+b$ 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

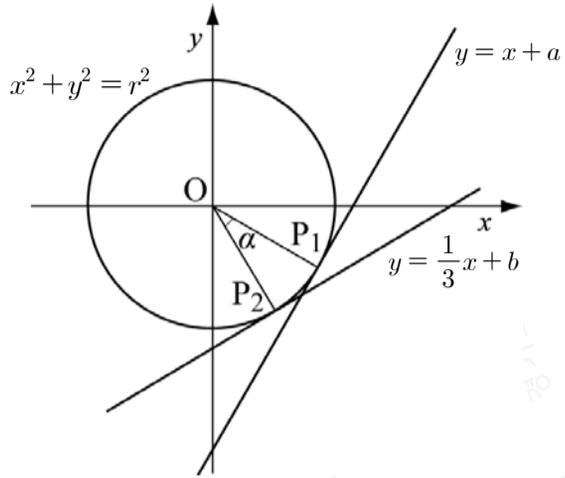
28. 두 다항함수 $f(x), g(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x) = -f(x), g(-x) = g(x)$ 를 만족하고 $h(x) = f(x) + xg(x)$ 로 정의할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점]

<보 기>

- ㄱ. $h(0) = 0$
 ㄴ. $h'(-x) = h'(x)$
 ㄷ. $h(x)$ 의 이계도함수 $h''(x)$ 가 $x=1$ 에서 극댓값 1을 가질 때, 방정식 $h''(x) - x = 0$ 의 실근은 적어도 3개이다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

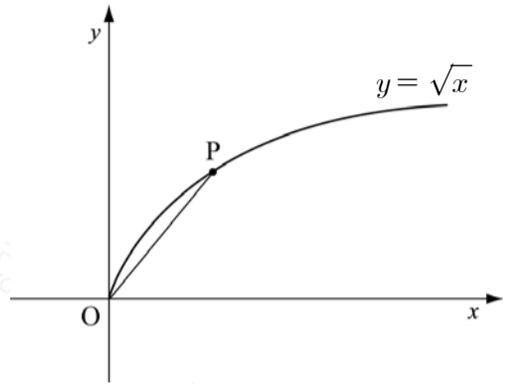
29. 두 직선 $y = x + a$, $y = \frac{1}{3}x + b$ 가 원 $x^2 + y^2 = r^2$ 에 접하는 점을 각각 P_1 , P_2 라 하고 $\angle P_1OP_2 = \alpha$ 일 때, $\tan \alpha$ 의 값은?
(단, $a < 0$, $b < 0$) [4점]



- ① $\frac{1}{4}$
- ② $\frac{1}{2}$
- ③ $\frac{3}{4}$
- ④ 1
- ⑤ $\frac{5}{4}$

단답형(30)

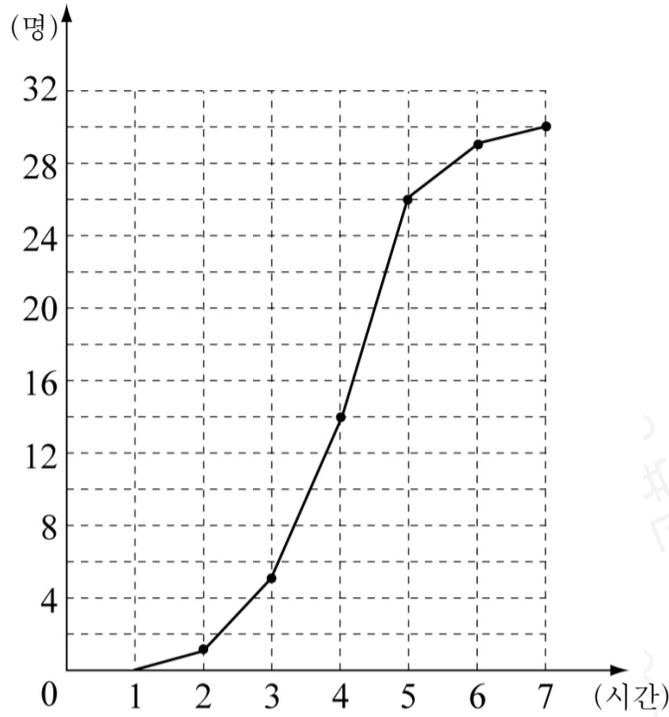
30. 점 P는 원점 O를 출발하여 곡선 $y = \sqrt{x}$ 를 따라 원점에서 멀어지고 있다. 점 P의 x좌표가 매초 2의 속도로 일정하게 변할 때, 직선 OP의 기울기가 10이 되는 순간 점 P의 y좌표의 시간(초)에 대한 순간변화율을 구하시오. [4점]



* 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

확률과 통계

26. 다음 그림은 어느 학급 학생들의 인터넷 사용 시간에 대한 누적도수의 분포를 그래프로 나타낸 것이다.



이 때, 상대도수가 가장 큰 계급의 계급값은? [3점]

- ① 2.5 ② 3.5 ③ 4.5 ④ 5.5 ⑤ 6.5

27. 다음은 이산확률변수 X 에 대한 확률분포표이다.

X	2	4	a	계
$P(X=x)$	b	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

$E(X) = 4$ 일 때, $V(X)$ 의 값은? [3 점]

- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

28. 표는 세 공장 A, B, C 에 대한 제 1 생산 라인과 제 2 생산 라인의 투자비용과 이 비용에 대한 공장의 이익률을 나타낸 것이다.

구분	제 1 생산 라인		제 2 생산 라인	
	투자비용	이익률	투자비용	이익률
공장 A	3억	5%	3억	5%
공장 B	2억	3%	4억	6%
공장 C	1억	3%	2억	7%

투자비용을 가중치로 할 때, 세 공장 A, B, C 의 이익률에 대한 가중평균을 각각 m_A, m_B, m_C 라 하자. m_A, m_B, m_C 의 대소관계를 옳게 나타낸 것은? [3 점]

- ① $m_A = m_B = m_C$ ② $m_A = m_B < m_C$
 ③ $m_A < m_B < m_C$ ④ $m_A = m_B > m_C$
 ⑤ $m_A > m_B > m_C$

29. 이산확률변수 X 에 대한 확률질량함수가

$$P(X=n) = {}_{100}C_n \left(\frac{1}{2}\right)^{100} \quad (n=0, 1, 2, 3, \dots, 100)$$

으로 주어질 때, 함수 $f(x)$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$f(x) = P(X \leq 5x + 50) \quad (-10 \leq x \leq 10)$$

이 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

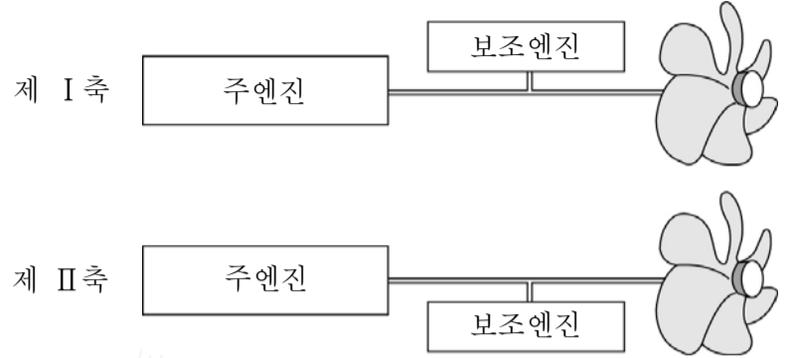
—<보 기>—

- ㄱ. 확률변수 X 의 분산은 25이다.
- ㄴ. $x_1 \leq x_2$ 이면 $f(x_1) \leq f(x_2)$ 이다.
- ㄷ. $f(-x) + f(x) < 1$ 을 만족하는 x 가 적어도 하나 존재한다.

- ① ㄱ
- ② ㄷ
- ③ ㄱ, ㄴ
- ④ ㄴ, ㄷ
- ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

단답형(30)

30. 어느 배의 제 I 축과 제 II 축의 주엔진과 보조엔진은 그림과 같다.



이 배는 주엔진이 고장나면 보조엔진이 작동되어 운항하고, 한 축의 엔진이 모두 고장나면 운항할 수 없다.

A 항구를 출발한 배가 B 항구까지 운항하는데 각 엔진이 고장날 확률은 각각 10%이고 제 I 축과 제 II 축은 독립적으로 작동한다.

주엔진 두 개를 작동한 상태로 출발한 배가 A 항구에서 B 항구까지 운항하였을 때, 보조엔진이 작동되었을 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다.

이 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p, q 는 서로소인 자연수)

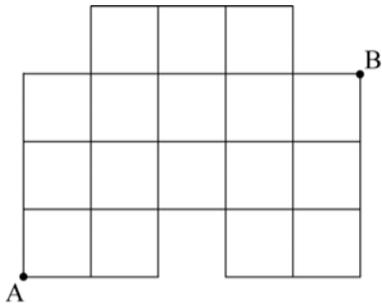
[4점]

* 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

이산수학

26. 그림과 같은 도로망에서 A에서 출발하여 B까지 최단거리로 가는 방법의 수는? [3점]

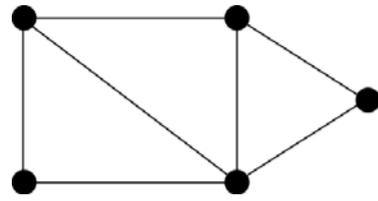


- ① 46 ② 48 ③ 50 ④ 52 ⑤ 54

27. 1부터 10까지 번호가 하나씩 쓰여 있는 10개의 공이 들어있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 몇 개의 공을 꺼내 그 중 2개의 공에 쓰여 있는 두 수를 더하려고 한다. 이 때, 두 수의 합이 11이 되는 경우가 항상 존재하려면 적어도 몇 개의 공을 꺼내야 하는가? [3점]

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

28. 그림은 꼭짓점의 개수가 5인 그래프이다. 이 그래프에 대한 설명 중 <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점]



<보기>

- ㄱ. 모든 꼭짓점의 차수의 합은 14이다.
- ㄴ. 오일러회로를 갖는다.
- ㄷ. 수형도를 만들기 위해 지워야 하는 변의 개수는 3개이다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
- ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

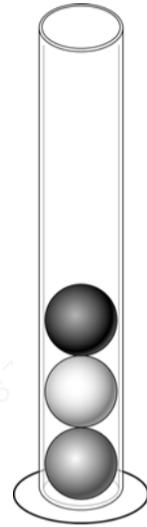
29. 회사의 영수증을 분류하던 중 합계 부분의 a 와 b 의 숫자가 지워져 있는 영수증을 발견하였다. 이 때, 두 수 a, b 의 곱 ab 의 최댓값은? (단, a, b 는 한 자리의 수) [4점]

영 수 증			
품목	단가	수량(개)	합계(원)
기념품		33	$a21b30$

- ① 8 ② 14 ③ 20 ④ 35 ⑤ 45

단답형(30)

30. 그림과 같이 밑면의 지름이 1인 원기둥 모양의 통에 지름이 1인 빨간공, 파란공, 노란공을 넣으려고 한다. 원기둥 모양의 통에 n 개의 공을 넣는 방법의 수를 a_n 이라 할 때, a_7 의 값을 구하시오. (단, 같은 색의 공을 연속해서 넣지 않는다.) [4점]



* 확인 사항
 ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.