

제 2 교시

수리 영역 (나형)

성명		수험번호						3				
----	--	------	--	--	--	--	--	---	--	--	--	--

- 자신이 선택한 유형('가'형 / '나'형)의 문제지인지 확인하시오.
- 문제지에 성명과 수험번호를 정확히 써 넣으시오.
- 답안지에 성명과 수험번호를 써 넣고, 또 수험번호와 답을 정확히 표시하시오.
- 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
- 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

1. $(\log_2 16) \times \sqrt[3]{64}$ 의 값은? [2 점]

- ① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

2. 두 이차정사각행렬 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ 에 대하여 $3A + 2X = B$ 가 성립할 때, 행렬 X 의 모든 성분의 합은?
[2 점]

- ① -7 ② -6 ③ -5 ④ -4 ⑤ -3

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{\sqrt{4n^2 + 1} - n}$ 의 값은? [2 점]

- ① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

4. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_2 = -1$, $a_1 + 2a_3 = 0$ 일 때, a_{10} 의 값은? [3 점]

- ① 17 ② 19 ③ 21 ④ 23 ⑤ 25

5. ${}_{n-1}P_2 + 4 = {}_{n+1}C_{n-1}$ 이 성립하는 모든 n 의 값의 합은?

[3 점]

- ① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

6. $\log_2 x = 5.2$ 일 때, $\log \frac{1}{x}$ 의 가수는? (단, $\log 2 = 0.30$) [3 점]

- ① 0.32 ② 0.36 ③ 0.40
④ 0.44 ⑤ 0.48

7. 1이 아닌 양의 실수 x, y 에 대하여 $\odot$ 을

$x \odot y = \log_x y + \log_y x$ 로 정의할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, a, b 는 양수) [3 점]

— <보 기> —

$$\neg. 4 \odot 16 = \frac{5}{2}$$

$$\neg. a^k \odot b^k = a \odot b$$

$$\neg. a^b \odot b^a = a \odot b^{\frac{a}{b}}$$

- ① $\neg$ ② $\neg$ ③ $\neg, \neg$
④ $\neg, \neg$ ⑤ $\neg, \neg, \neg$

8. 최근에 상품을 개발한 어느 회사에서 상품에 대한 평가단으로 남자 300명, 여자 200명을 선정하였다. 이 평가단이 상품에 대한 평가를 한 결과 남자 중에서 60%, 여자 중에서 50%가 긍정적인 평가를 하였다. 상품 평가단 500명 중에서 임의로 선택한 사람이 상품에 대해 긍정적인 평가를 하였을 때, 이 사람이 남자일 확률은? [3 점]

- ① $\frac{3}{7}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{4}{7}$ ④ $\frac{9}{14}$ ⑤ $\frac{5}{7}$

9. 행렬 $A = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}$ 에 대응하는 직선을 $y = mx + n$ 으로 정의할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [3 점]

—<보 기>—

- ㄱ. 자연수 k 에 대하여 행렬 A^k 에 대응하는 직선은 $y = m^k x + n^k$ 이다.
 ㄴ. 역행렬이 존재하는 행렬 A 에 대응하는 직선은 원점을 지나지 않는다.
 ㄷ. 행렬 A 와 그 역행렬 A^{-1} 에 대응하는 직선은 서로 수직이다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

10. 서로 독립인 두 사건 A, B 에 대하여 $P(B) = \frac{1}{3}$, $P(A \cap B^C) = \frac{1}{2}$ 일 때, $P(A \cap B)$ 의 값은? [3 점]

- ① $\frac{1}{18}$ ② $\frac{1}{15}$ ③ $\frac{1}{12}$ ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

11. 연립방정식 $\begin{cases} \log_2 x + \log_3 y = 2 \\ (\log_3 x)(\log_4 y) = -\frac{3}{2} \end{cases}$ 의 해가 $x = a, y = b$

일 때, $3ab$ 의 값은? (단, $a > 1$) [3 점]

- ① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

12. 두 집합 $X = \left\{ (x, y) \mid \begin{pmatrix} a^2+1 & 2a^2-3 \\ 2 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$,

$Y = \left\{ (x, y) \mid y = -\frac{1}{x} \right\}$ 에 대하여 $X \cap Y \neq \emptyset$ 일 때, 모든 상수 a 의 값의 합은? [3 점]

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

13. 1이 아닌 양수 a, b ($a > b$)에 대하여 두 함수 $f(x) = a^x$, $g(x) = b^x$ 라 하자. 양수 n 에 대하여 <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [4 점]

<보 기>

- ㄱ. $f(n) > g(n)$
 ㄴ. $f(n) < g(-n)$ 이면 $a > 1$ 이다.
 ㄷ. $f(n) = g(-n)$ 이면 $f\left(\frac{1}{n}\right) = g\left(-\frac{1}{n}\right)$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

14. 다음은 $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여

$$\left(1 + \frac{1}{1^3}\right)\left(1 + \frac{1}{2^3}\right)\left(1 + \frac{1}{3^3}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n^3}\right) < 3 - \frac{1}{n} \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

이 성립함을 수학적귀납법으로 증명하는 과정이다.

<증명>

(i) $n = 2$ 일 때

$$(\text{좌변}) = \left(1 + \frac{1}{1^3}\right)\left(1 + \frac{1}{2^3}\right) = \frac{9}{4}, \quad (\text{우변}) = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

이므로 ㉠이 성립한다.

(ii) $n = k$ ($k \geq 2$)일 때 ㉠이 성립한다고 가정하면

$$\left(1 + \frac{1}{1^3}\right)\left(1 + \frac{1}{2^3}\right)\left(1 + \frac{1}{3^3}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{k^3}\right) < 3 - \frac{1}{k} \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

㉡의 양변에 (가)를 곱하면

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{1^3}\right)\left(1 + \frac{1}{2^3}\right)\left(1 + \frac{1}{3^3}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{k^3}\right) (\text{가}) \\ < \left(3 - \frac{1}{k}\right) (\text{가}) \quad \cdots \textcircled{㉢} \end{aligned}$$

㉢의 우변을 정리하면

$$(\text{우변}) = 3 - \frac{(\text{나})}{k(k+1)^3}$$

$$\text{이 때, } \frac{(\text{나})}{k(k+1)^3} - \frac{1}{k+1} (\text{다}) \geq 0$$

따라서 $n = k+1$ 일 때도 ㉠이 성립한다.

그러므로 (i), (ii)에 의하여 $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 부등식은 성립한다.

위의 증명 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [4 점]

	(가)	(나)	(다)
①	$1 + \frac{1}{(k+1)^3}$	$k^3 + 3k^2 + 2$	$<$
②	$1 + \frac{1}{(k+1)^3}$	$k^3 + 3k^2 + 2$	$>$
③	$1 + \frac{1}{(k+1)^3}$	$k^3 - 3k^2 + 2$	$<$
④	$\frac{1}{(k+1)^3}$	$k^3 - 3k^2 + 2$	$>$
⑤	$\frac{1}{(k+1)^3}$	$k^3 - 3k^2 + 2$	$<$

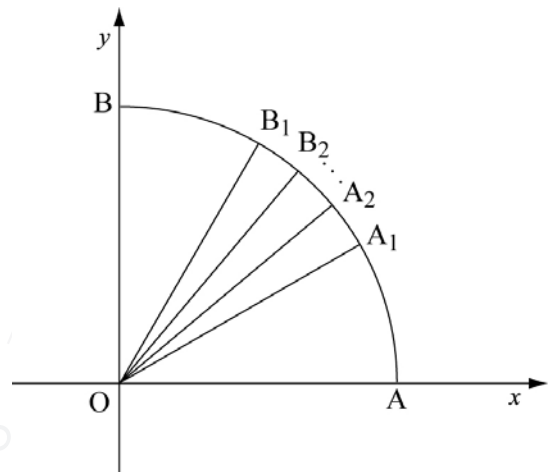
15. 함수 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $P(a, b)$ 와 $y=f(x)$ 의 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 위의 임의의 점 $Q(c, d)$ 로 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 를 만든다. 다음 함수로 행렬 A 를 만들 때, 역행렬 A^{-1} 이 항상 존재하는 것은? [4 점]

- ① $y=x+1$ ② $y=\log x$ ③ $y=2^x$
 ④ $y=\sqrt{x-1}$ ⑤ $y=\frac{1}{x}$

16. A 학생의 주머니에는 빨간 구슬 2 개와 노란 구슬 3 개, B 학생의 주머니에는 노란 구슬 1 개와 파란 구슬 4 개가 들어 있다. 두 명의 학생이 각자의 주머니에서 한 개의 구슬을 꺼내어 색깔에 따라 승부를 가리는데, 빨간 구슬이 노란 구슬에 이기고, 노란 구슬은 파란 구슬에 이기고, 파란 구슬은 빨간 구슬에 이긴다고 한다. 이 때, A 학생이 이길 확률은? (단, 같은 색의 구슬이 나왔을 때는 구슬을 한 개씩 더 꺼내어 승부를 가리고, 꺼낸 구슬은 다시 넣지 않는다.) [4 점]

- ① $\frac{29}{50}$ ② $\frac{31}{50}$ ③ $\frac{33}{50}$ ④ $\frac{7}{10}$ ⑤ $\frac{37}{50}$

17. 그림과 같이 사분원 AOB에 대하여 $\angle AOB$ 를 삼등분하는 직선이 사분원과 만나는 교점을 각각 A_1, B_1 이라 하고, $\angle A_1OB_1$ 을 삼등분하는 직선이 사분원과 만나는 교점을 각각 A_2, B_2 라고 하자. 이와 같은 방법으로 계속할 때, $\angle A_{10}OB$ 의 크기는? [4 점]



- ① $\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{1}{3^9}\right)$ ② $\frac{\pi}{4}\left(1+\frac{1}{3^9}\right)$ ③ $\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{1}{3^{10}}\right)$
 ④ $\frac{\pi}{4}\left(1+\frac{1}{3^{10}}\right)$ ⑤ $\frac{\pi}{4}\left(1+\frac{1}{3^{11}}\right)$

단답형(18 ~ 25)

18. 행렬 $A=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ 에 대하여 $(A^{-1})^2$ 의 모든 성분의 합을 구하시오. (단, A^{-1} 는 A 의 역행렬이다.) [3 점]

19. 방정식 $16^x - 4^{x+3} + 100 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $2^{\alpha+\beta}$ 의 값을 구하시오. [3 점]

20. 그림과 같이 넓이가 1인 정삼각형 모양의 타일을 다음과 같은 규칙으로 붙인다.

[1 단계] : 정삼각형 모양의 타일을 한 개 붙인다.

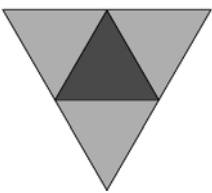
[n 단계] : $n-1$ 단계에서 붙여진 타일의 바깥쪽 테두리의 각 변에 정삼각형 모양의 타일을 붙인다.

이와 같이 10 단계를 시행했을 때, 타일로 덮인 부분의 전체의 넓이를 구하시오. [3 점]

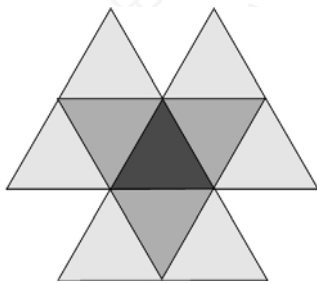
1 단계



2 단계

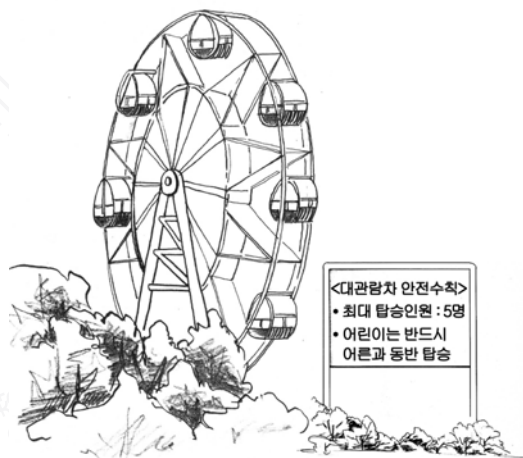


3 단계



21. 주머니 A에 들어 있는 크기가 같은 흰 공 7개를 주머니 B로 모두 옮겨 담으려고 한다. 한 번에 한 개 또는 두 개씩 꺼내어 옮겨 담는 경우의 수를 구하시오. [4 점]

22. 놀이공원의 대관람차는 한 차량당 최대 탑승 인원이 5명이고, 안전을 위하여 어린이들은 반드시 어른을 한 명 이상 동반하여 탑승해야 한다. 어른 3명과 어린이 5명이 비어있는 서로 다른 8대의 차량 중 두 대의 차량을 선택하여 탑승하는 방법의 수를 n 이라고 할 때, $\frac{n}{10}$ 의 값을 구하시오. [4 점]

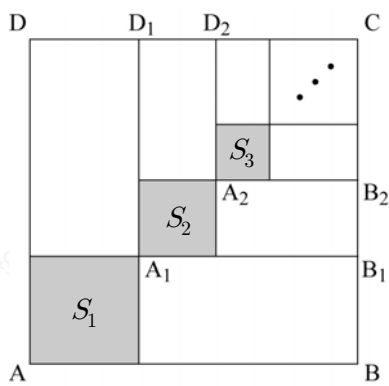


23. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD에서 선분 AB와 선분 AD를 각각 $m:n$ 으로 내분하는 점을 지나는 두 직선을 그어 만들어지는 4개의 사각형 중 아랫부분 정사각형의 넓이를 S_1 , 윗부분의 정사각형을 $A_1B_1CD_1$ 이라 하자.

다시 정사각형 $A_1B_1CD_1$ 에서 선분 A_1B_1 과 선분 A_1D_1 을 각각 $m:n$ 으로 내분하는 점을 지나는 두 직선을 그어 만들어지는 4개의 사각형 중 아랫부분 정사각형의 넓이를 S_2 , 윗부분의 정사각형을 $A_2B_2CD_2$ 라 하자.

이와 같은 시행을 무한히 반복할 때, $\sum_{k=1}^{\infty} S_k = \frac{1}{7}$ 이다.

$m^2 + n^2$ 의 값을 구하시오. (단, m, n 은 서로소인 자연수) [4 점]



25. 모래시계 A, B, C 에 들어 있는 모래의 양은 각각 $3^a, 9^b, 27^c$ 이고 매 초당 모래가 위에서 아래로 일정하게 떨어지는 양은 각각 a, b, c 이다. a, b, c 는 이 순서대로 등비수열을 이루고, $3^a, 9^b, 27^c$ 도 이 순서대로 등비수열을 이루며, 두 수열의 공비는 같다. 모래시계 A, B, C 로 썰 수 있는 시간(초)을 각각 t_A, t_B, t_C 라 할 때, $t_A + t_B + t_C$ 의 값을 구하시오. (단, 모래가 다 떨어진 후 뒤집지 않는다.) [4 점]



5지선다형(26 ~ 29)

24. 자연수 n 에 대하여 $f(n)$ 을 $\log_2 n$ 과 $\log_2(2n+1)$ 사이의 정수로 정의할 때, $\sum_{n=1}^{20} f(n)$ 의 값을 구하시오. [3 점]

26. 함수 $f(x) = \log_2 x$ 의 그래프 위의 두 점 $A(a, f(a)), B(b, f(b))$ 를 이은 선분 AB를 1:2로 내분하는 점이 x 축 위에 있을 때, a^2b 의 값은? [3 점]

- ① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3

27. 자연수 n 에 대하여 도형 $(n+1)|x| + n|y| = 1$ 의 넓이를 S_n 이라고 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 의 값은? [4 점]

- ① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

28. 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} (x-1)(\log_2 x)^n$ 이 수렴할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4 점]

<보 기>

ㄱ. 수렴하기 위한 x 값의 범위는 $\frac{1}{2} < x < 2$ 이다.

ㄴ. 무한급수의 합이 1이 되도록 하는 x 의 값은 한 개 존재한다.

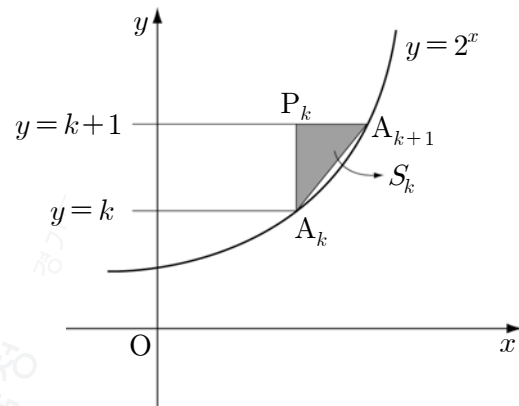
ㄷ. 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\log_2 x - 1}{2} \right)^n$ 은 수렴한다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

29. 그림과 같이 곡선 $y=2^x$ 과 두 직선 $y=k$, $y=k+1$ 의 교점을 각각 A_k , A_{k+1} 이라 하자.

점 A_k 를 지나고 y 축에 평행한 직선과 직선 $y=k+1$ 이 만나는 점을 P_k 라 하고, 세 점 A_k , A_{k+1} , P_k 를 연결한 삼각형의 넓

이를 S_k 라 할 때, $\sum_{k=1}^7 S_k$ 의 값은? [4 점]



- ① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

단답형(30)

30. 집합 $\{1, 2, 3, \dots, 16\}$ 에서 선택한 임의의 두 수 m, n 에 대하여 $3^m + 8^n$ 의 일의 자리의 숫자가 3일 확률이 $\frac{b}{a}$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 서로소인 자연수) [4 점]

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.