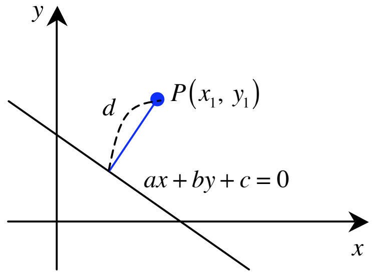
점과 직선 사이의 거리

점 $P(x_1,\ y_1)$에서
직선 $ax+by+c=0$까지의 거리 d는

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



증명1)

점 P를 지나고 직선 $ax+by+c=0\cdots(1)$에 수직인 직선의 방정식은
$b(x-x_1)-a(y-y_1)=0\cdots(2)$

직선 (1) 과 (2)를 연립하여 교점의 좌표 $(x_2,\ y_2)$를 구해보면

$$x_2=\frac{b^2x_1-aby_1-ac}{a^2+b^2},\quad y_2=\frac{a^2y_2-abx_1-bc}{a^2+b^2}$$

따라서 $d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

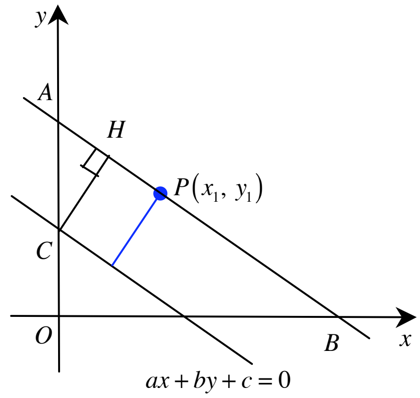
$$=\sqrt{\left(x_1-\frac{b^2x_1-aby_1-ac}{a^2+b^2}\right)^2+\left(y_1-\frac{a^2y_2-abx_1-bc}{a^2+b^2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{(ax_1+by_1+c)^2\left\{\left(-\frac{a}{a^2+b^2}\right)^2+\left(-\frac{b}{a^2+b^2}\right)^2\right\}}$$

$$=\sqrt{\frac{(ax_1+by_1+c)}{a^2+b^2}}=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

증명 2)

점 P를 지나면서 직선 $m:\ ax+by+c=0$와 평행한 직선의 방정식을 l이라고 한면



$l\ :\ a(x-x_1)+b(y-y_1)=0$

직선 m의 y절편을 C,
직선 l의 $x,\ y$절편을 각각 $B,\ A$,
점 C에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라고 하면

(1) $b=0$일 때

$m: x=-\dfrac{c}{a},\quad l: x=x_1$ 이므로

$$d=\left|x_1-\left(-\frac{c}{a}\right)\right|=\left|x_1+\frac{c}{a}\right|=\left|\frac{ax_1+c}{a}\right|=\left|\frac{ax_1+0\cdot y_1+c}{\sqrt{a^2+0^2}}\right|=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

(2) $b\neq 0$일 때

직선 l의 기울기가 $-\dfrac{a}{b}$인 것과 피타고라스의 정리를 이용하면

$\overline{AO}:\overline{BO}:\overline{AB}=|a|:|b|:\sqrt{a^2+b^2}$

ΔAOB와 ΔAHC가 닮음꼴이므로 $\overline{CH}:\overline{AC}=|b|:\sqrt{a^2+b^2}$

$A\left(0,\ \dfrac{ax_1+by_1}{b}\right),\ C\left(0,\ -\dfrac{c}{b}\right)$ 이므로 $\overline{AC}=\left|\dfrac{ax_1+by_1}{b}-\left(-\dfrac{c}{b}\right)\right|=\left|\dfrac{ax_1+by_1+c}{b}\right|$

$$\therefore d=\overline{CH}=\frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}}\times\overline{AC}=\frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}}\times\left|\frac{ax_1+by_1+c}{b}\right|=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$