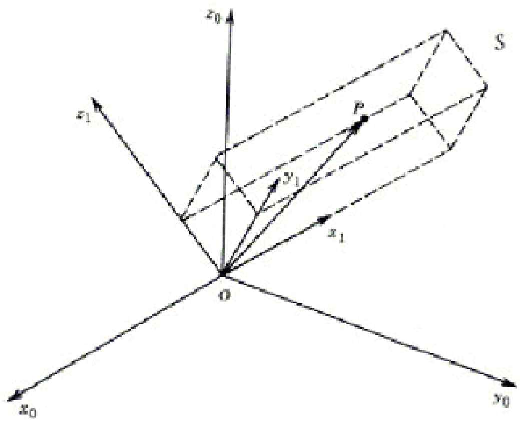
Chapter 2. 강체운동과 동차변환(Rigid Motions and Homogeneous Transformations)

□ 강체운동(Rigid Motion) = 회전(Rotation)운동 + 병진(Translation)운동

□ 회전(Rotation)



강체 S위의 점 P의 좌표를 $x_0y_0z_0$좌표계에서 P_{0x},P_{0y},P_{0z}라고하면 벡터 OP는 다음처럼 표현된다.

$$P_0 = P_{0x}i_0 + P_{0y}j_0 + P_{0z}k_0$$

여기서 P_{0x},P_{0y},P_{0z}는 점 P의 위치를 나타내는 각 축에 해당되는 스칼라량이고 i_0,j_0,k_0는 각 축의 단위벡터를 나타낸다.(단위벡터는 크기가 1인 방향성분만을 가진 벡터이다.)
그리고, $x_1y_1z_1$좌표계에서의 P는

$$P_1 = P_{1x}i_1 + P_{1y}j_1 + P_{1z}k_1$$

로 표현할 수 있다.
점 P에 대한 두 좌표계간의 관계를 알아보자.
벡터공간에서 벡터 P_0와 P_1은 동일하기 때문에,

$$P_0 = P_1$$

으로 볼 수 있고, 위 두 좌표계에서 벡터성분간의 관계를 살펴보면 다음과 같다.

$$P_{0x} = P_{1x}i_1 \cdot i_0 + P_{1y}j_1 \cdot i_0 + P_{1z}k_1 \cdot i_0$$

$$P_{0y} = P_{1x}i_1 \cdot j_0 + P_{1y}j_1 \cdot j_0 + P_{1z}k_1 \cdot j_0$$

$$P_{0z} = P_{1x}i_1 \cdot k_0 + P_{1y}j_1 \cdot k_0 + P_{1z}k_1 \cdot k_0$$

왜 이렇게 표현이 되냐하면 두 벡터(P_0,P_1)가 같기때문에 그 양변에 각 축의 단위벡터를 곱(내적)하게 되면 각 축의 벡터성분에 대한 관계가 나오게 된다.
$i_0 \cdot i_0 = 1, i_0 \cdot j_0 = 0$ 처럼 같은 단위벡터간의 내적(Inner Product, ·)은 1이 된다.
따라서 위의 식을 행렬식으로 표현하면

$$\begin{bmatrix} P_{0x} \\ P_{0y} \\ P_{0z} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} i_1 \cdot i_0 & j_1 \cdot i_0 & k_1 \cdot i_0 \\ i_1 \cdot j_0 & j_1 \cdot j_0 & k_1 \cdot j_0 \\ i_1 \cdot j_0 & j_1 \cdot k_0 & k_1 \cdot k_0 \end{bmatrix}}_{\text{Rotation Matrix; R}} \begin{bmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \\ P_{1z} \end{bmatrix} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 식(2\text{-}1)$$

$$P_0 = R_0^1 P_1$$

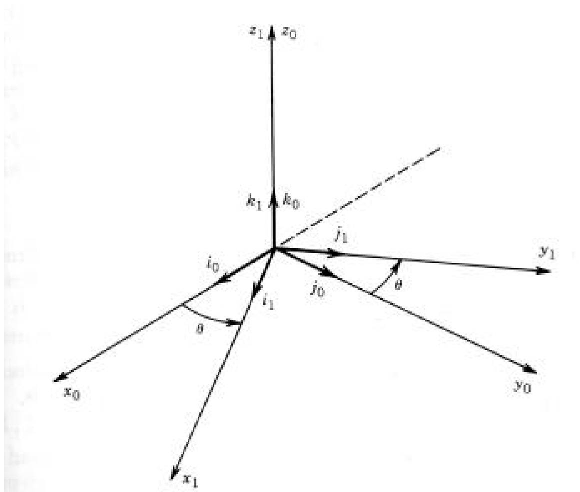
위에서 변환행렬을 실제 각 축을 기준으로 θ만큼 회전시켰을때의 변환행렬을 구해보면 다음과 같다.

$$R_{x,\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$R_{y,\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 식(2\text{-}2)$$

$$R_{z,\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$R_{x,\theta}$는 x축을 기준으로 θ만큼 회전하였을때의 변환행렬, 또는 회전행렬이라고 부른다.
그리고 각 축을 기준으로 오른손좌표계(Right hand)에 의해서 좌표축을 정하고 식(2-1)에서의 R이 어떻게 식(2-2)처럼 변하는가 하면



위 그림은 z축을 기준으로 θ만큼 회전하였을때의 형태이다. z축을 기준으로 회전하였기 때문에 z축의 단위벡터 k_0와 k_1는 같다. 따라서,

$$k_0 \cdot k_1 = 1$$

$$k_1 \cdot i_0 = k_1 \cdot j_0 = i_1 \cdot k_0 = j_1 \cdot k_0 = 0 \text{이 되고}$$

$$i_1 \cdot i_0 = |i_1||i_0|\cos\theta = \cos\theta$$

$$j_1 \cdot j_0 = |j_1||j_0|\cos\theta = \cos\theta$$

$$i_1 \cdot j_0 = \cos(90^\circ - \theta) = \cos 90^\circ \cos\theta + \sin 90^\circ \sin\theta = \sin\theta$$

$$j_1 \cdot i_0 = \cos(90^\circ + \theta) = \cos 90^\circ \cos\theta - \sin 90^\circ \sin\theta = -sin\theta$$

이런식으로 다른 축도 계산을 해주면 식(2-2)와 같이 나오게 되는것을 볼 수 있다.

□ 회전의 합성(Composition)

각 축을 기준으로 여러번 회전시켰을때 변환행렬이 어떻게 되는가에 대한 설명이다.

변환행렬 R_0^1은 두 좌표계 $x_0y_0z_0$와 $x_1y_1z_1$사이의 회전변환(Rotational Transformation)을 나타낸다고 하였다. 그런데 $x_0y_0z_0$와 $x_1y_1z_1$을 회전하여 얻어지는 제 3의 좌표계 $x_2y_2z_2$를 추가하면 이 세 좌표계 사이의 관계는 다음과 같다.

$$P_0 = R_0^1 P_1$$

$$P_0 = R_0^2 P_2$$

$$P_1 = R_1^2 P_2$$

위의 세 식을 조합하면 아래와 같이 나온다.

$$P_0 = R_0^1 R_1^2 P_2$$

따라서, 최종적으로 변환행렬간에는 다음과 같은 관계가 있다.

$$R_0^2 = R_0^1 R_1^2$$

이것이 회전변환에 대한 합성법칙(Composition Law)이다. 이것은 점 P의 좌표를 $x_2y_2z_2$좌표계에 대한 표현 P_2로부터 $x_0y_0z_0$좌표계에 대한 표현 P_0로 변환하기 위해, 먼저 R_1^2를 사용하여 $x_1y_1z_1$좌표계에 대한 좌표 P_1으로 변환하고 다음에 R_0^1을 사용하여 P_1을 P_0로 변환한다는 것을 의미한다.

예를들어 설명하면, Current Frame의 y축에 대하여 ϕ도 회전하고 다음에 다시 Current Frame의 z축에 대하여 θ도 회전했을때 회전행렬을 R이라고 하면,

$$R = R_{y,\phi} R_{z,\theta}$$

가 된다. 회전행렬이 곱해지는 순서를 잘 봐야한다. Current Frame에 대해서 계속 회전하였기때문에 회전행렬 R이 차례대로 곱해진다. 따라서 식(2-2)에서 각 축에대한 회전행렬로 대입하여 풀면,

$$R = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi\cos\theta & -\cos\phi\sin\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -\sin\phi\cos\theta & \sin\phi\sin\theta & \cos\phi \end{bmatrix}$$

위에서 본 회전행렬의 경우는 Current Frame을 기준으로 항상 회전하기 때문에 회전행렬 R이 곱해지는 순서가 오른쪽으로 붙어서 가지만 Fixed Frame을 기준으로 회전한다면 그 곱해지는 순서가 역으로 바뀐다는 사실을 알아야 한다. 예를들면 위에서 y축에 대해서 ϕ회전 한 뒤에 Current Frame이 아닌 Fixed Frame을 기준으로 z축에 대해서 θ도 회전했을 때 회전행렬 R은

$$R = R_{z,\theta} R_{y,\phi}$$

가 된다는 것이다.

* Premultiply : 기준좌표계의 주축에 대한 회전합성 변환
→ 기준좌표계에 대한 회전의 합성은 각 축에 대한 회전행렬 R이 역순으로 곱해진다.
예를들면,

1. 기준좌표계의 x축을 기준으로 α도 회전
2. 기준좌표계의 y축을 기준으로 β도 회전
3. 기준좌표계의 z축을 기준으로 Θ도 회전

최종으로 합성된 회전행렬은,

$$R = R_{z,\theta} R_{y,\beta} R_{x,\alpha}$$

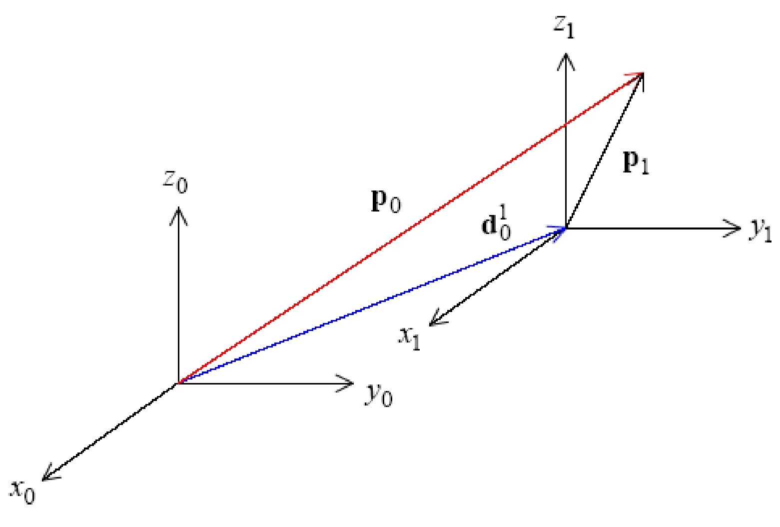
* Postmultiply : 이동좌표계의 주축에 대한 회전합성 변환
예를들면,

1. 현재좌표계의 x축을 기준으로 α도 회전
2. 현재좌표계의 y축을 기준으로 β도 회전
3. 현재좌표계의 z축을 기준으로 Θ도 회전

최종으로 합성된 회전행렬은,

$$R = R_{x,\alpha} R_{y,\beta} R_{z,\theta}$$

□ 병진(Translation)



어떤 점 P가 있다면 $x_0 y_0 z_0$좌표계에서 볼때,

$$P_0 = P_1 + d_0^1$$

의 관계가 있다. 각 성분으로 볼때는

$$P_{0x} = P_{1x} + d_{0x}^1$$

$$P_{0y} = P_{1y} + d_{0y}^1$$

$$P_{0z} = P_{1z} + d_{0z}^1$$

으로 볼 수 있다.
강체운동(Rigid Motion)은 순수회전(Pure rotation)과 순수병진(Pure transformation)의 조합으로 생각할 수 있기때문에

$$P_0 = RP_1 + d$$

로 정의할 수 있다.

□ 동차변환(Homogeneous transformation)
두 강체운동 P_0와 P_1이 다음과 같다고 할때,

$$P_0 = R_0^1 P_1 + d_0^1$$
$$P_1 = R_1^2 P_2 + d_1^2$$

두 강체운동을 합성하면 제3의 강체운동이 정의되고 이 운동에 대한 표현은 P_1을 P_0식에 대입하여

$$P_0 = R_0^1 R_1^2 P_2 + R_0^1 d_1^2 + d_0^1$$

이 된다. 위 식은 아래식처럼 나타낼수 있고,

$$P_0 = R_0^2 P_2 + d_0^2$$

그러므로,

$$R_0^2 = R_0^1 R_1^2$$
$$d_0^2 = d_0^1 + R_0^1 d_1^2$$

을 알수있고 이것을 행렬로 표현하면

$$\begin{bmatrix} R_0^1 & d_0^1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1^2 & d_1^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_0^1 R_1^2 & R_0^1 d_1^2 + d_0^1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

여기서,

$$H = \begin{bmatrix} R & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; R \in SO(3)$$

H를 **동차변환(Homogeneous Transformation)행렬**이라고 한다.
동차변환행렬은 4×4행렬이고 4개의 Submatrices로 구성되며 Rotation과 Translation을 같이 표현 할 수 있다.

$$\begin{array}{cc} & \text{Rotation} \quad \text{Translation} \\ H = & \left[\begin{array}{c|c} R_{3\times 3} & d_{3\times 1} \\ \hline f_{1\times 3} & 1 \end{array}\right]; \quad R \in SO(3) \\ & \text{perspective} \quad \text{Scale} \end{array}$$

* Scale과 Perspective는 보통 그래픽 프로그램을 짤때 사용되기도 하는데 보통 Perspective를 0으로, Scale을 1로 둔다. Scale은 강체의 크기를 말한다. Scale이 1보다 큰경우는 1로 만들어 준다.

동차변환행렬은 6개의 기본동차변환행렬로 구성되어진다.

$$Trans_{x,a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, Trans_{y,b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, Trans_{z,c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Rot_{x,a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, Rot_{y,b} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, Rot_{z,c} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ si\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

동차변환에 대한 예제 하나를 보자.

현 x축을 중심으로 a도 회전하고 다음에 현 x축을 따라 b만큼 병진운동하고 다음에 현 z축을 따라 d만큼 병진운동하고 마지막으로 현 z축을 중심으로 θ도 회전할 때 동차변환행렬 H는 다음과 같다.

$$H = Rot_{x,a} Trans_{x,b} Trans_{z,d} Rot_{z,\theta}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & b \\ \cos a \sin\theta & \cos a \cos\theta & -\sin\theta & -\sin a d \\ \sin a \sin\theta & \sin a \cos\theta & \cos a & \cos a d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$