

2007학년도 4월 고3 전국연합학력평가 문제지

수리 영역(나형)

제 2 교시

성명

수험번호

3

1

- 자신이 선택한 유형('가'형/'나'형)의 문제지인지 확인하시오.
- 문제지에 성명과 수험 번호를 정확히 써 넣으시오.
- 답안지에 수험 번호, 선택 과목, 답을 표기할 때에는 반드시 '수험생 이 지켜야 할 일'에 따라 표기하시오.
- 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점, 4점입니다.
- 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

1. $8^{\frac{5}{6}} \times 4^{-\frac{1}{4}} \div 2^{\frac{1}{2}}$ 의 값은? [2점]

- ① 1
- ② $\sqrt{2}$
- ③ 2
- ④ $2\sqrt{2}$
- ⑤ 4

2. $(\log_{10} 2)^2 + (\log_{10} 5)^2 + \log_{10} 4 \cdot \log_{10} 5$ 의 값은? [2점]

- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5

3. 등비수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_2 + a_4 = 810$, $a_5 + a_7 = 30$ 일 때, a_{10} 의 값은? [2점]

- ① $\frac{1}{9}$
- ② $\frac{1}{3}$
- ③ 1
- ④ 3
- ⑤ 9

4. 1이 아닌 세 양수 a , b , c 에 대하여 $a = b^2 = c^3$ 이 성립할 때, $\log_a b + \log_b c + \log_c a$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{23}{6}$
- ② $\frac{25}{6}$
- ③ $\frac{29}{6}$
- ④ $\frac{31}{6}$
- ⑤ $\frac{35}{6}$

5. <보기>에서 수렴하는 수열을 모두 고른 것은? [3점]

〈 보 기 〉

ㄱ. $\left\{ \tan \frac{2n+1}{4} \pi \right\}$
 ㄴ. $\{ \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \}$
 ㄷ. $\{ \log_2 n^2 - 2 \log_2 (n+2) \}$

- ① ㄱ
 ② ㄷ
 ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ
 ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

6. 이차정사각행렬 A 가 $A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A \begin{pmatrix} 3a-c \\ 3b-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ 를 만족시킬 때,

$A \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ 의 모든 성분의 합은? (단, a, b, c, d 는 상수이다.) [3점]

- ① 1
 ② 2
 ③ 3
 ④ 4
 ⑤ 5

7. 상수 a, b 에 대하여 행렬 $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 2 \end{pmatrix}$ 가 $A - A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 을

만족시킬 때, $a+b$ 의 값은? (단, $2a \neq b$ 이고, A^{-1} 는 A 의 역행렬이다.) [3점]

- ① 2
 ② 4
 ③ 6
 ④ 8
 ⑤ 10

8. <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고르면? [3점]

〈 보 기 〉

ㄱ. $\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$
 ㄴ. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \frac{2}{n(n+1)}$
 ㄷ. $\sum_{k=1}^n \left(\sum_{l=1}^k l \right) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

- ① ㄱ
 ② ㄴ
 ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ
 ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

9. 다음은 양수 a, b 에 대하여 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ 일 때, 모든 자연수 n 에 대하여 $(a+b)^n - a^n - b^n \geq 2^{2n} - 2^{n+1}$ 이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

[증명]

(i) $n=1$ 일 때, $(a+b) - a - b \geq 2^2 - 2^2$ 이므로 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때 성립한다고 가정하면

$$(a+b)^k - a^k - b^k \geq 2^{2k} - 2^{k+1} \text{이다.}$$

$n=k+1$ 일 때 성립함을 보이자.

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1 \text{이면 } ab = a+b \text{ 이므로 } ab \text{의 최소값은}$$

(가) 이다.

$$(a+b)^{k+1} - a^{k+1} - b^{k+1}$$

$$= \text{(나)} \{ (a+b)^k - a^k - b^k \} + a^k b + ab^k$$

$$\geq \text{(가)} (2^{2k} - 2^{k+1}) + \text{(다)}$$

$$= 2^{2(k+1)} - 2^{(k+1)+1}$$

그러므로 $n=k+1$ 일 때도 성립한다.

따라서 (i), (ii)에 의해서

모든 자연수 n 에 대하여 $(a+b)^n - a^n - b^n \geq 2^{2n} - 2^{n+1}$ 이다.

이 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [4점]

	(가)	(나)	(다)
①	2	$(a-b)$	2^{k+1}
②	2	$(a-b)$	2^{k+2}
③	2	$(a+b)$	2^{k+2}
④	4	$(a+b)$	2^{k+1}
⑤	4	$(a+b)$	2^{k+2}

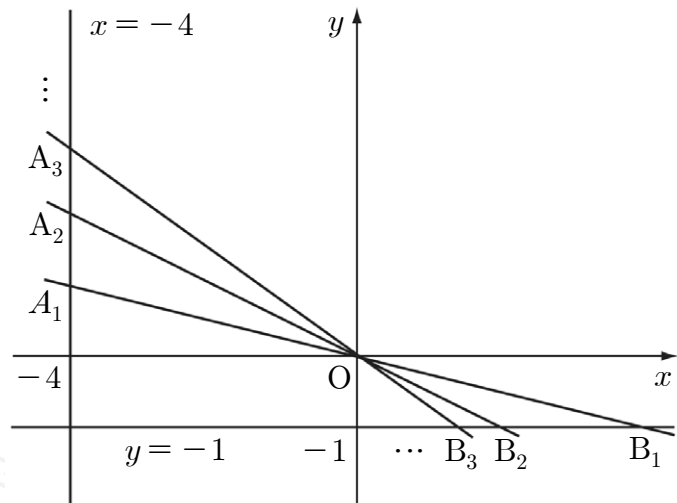
10. 두 수 $\sqrt{\frac{2^a \cdot 5^b}{2}}$ 과 $\sqrt[3]{\frac{2^a \cdot 5^b}{5}}$ 이 모두 자연수일 때, $a+b$ 의 최소값은? (단, a, b 는 자연수이다.) [4점]

- ① 2
② 3
③ 5
④ 7
⑤ 9

11. 원점 $O(0, 0)$ 과 직선 $x = -4$ 위에 점 $A_1(-4, 1), A_2(-4, 2), A_3(-4, 3), \dots$ 이 있다. 직선 $y = -1$ 과 직선 OA_1 , 직선 OA_2 , 직선 $OA_3, \dots$ 과의 교점을 각각 $B_1, B_2, B_3, \dots$ 이라 하자.

$\triangle A_n O A_{n+1}$ 의 넓이를 S_n , $\triangle B_n O B_{n+1}$ 의 넓이를 T_n 이라 할 때,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n S_k T_k$ 의 값은? [4점]



- ① 4
② 8
③ 12
④ 16
⑤ 20

12. 이차정사각행렬을 원소로 갖는 집합

$$S = \left\{ X \mid X = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}, x, y \text{는 자연수} \right\}$$

에 대하여 <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고르면? [4점]

< 보 기 >

- ㄱ. 집합 S 는 곱셈에 대하여 닫혀있다.
ㄴ. 집합 S 에 대하여 곱셈에 대한 교환법칙이 성립한다.
ㄷ. $A \in S$ 이고 A 의 모든 성분의 합이 3이면 A^n 의 모든 성분의 합은 $n+2$ 이다.

- ① ㄱ
② ㄴ
③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

13. 다음은 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ 일 때, A^n 을 구하는 과정이다.

모든 자연수 n 에 대하여 $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ 이라 하자.

행렬의 곱셈에 대한 결합법칙이 성립하여

$A^{n+1} = A \cdot A^n = A^n \cdot A$ 이므로

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \\ c_{n+1} & d_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n + c_n & b_n + d_n \\ 2c_n & 2d_n \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & a_n + 2b_n \\ c_n & c_n + 2d_n \end{pmatrix} \text{이다.}$$

따라서 $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + c_n = a_n \\ b_{n+1} = b_n + d_n = a_n + 2b_n \\ c_{n+1} = 2c_n = c_n \\ d_{n+1} = 2d_n = c_n + 2d_n \end{cases}$ 이므로

$b_{n+1} = 2b_n + \boxed{\text{(가)}}$ 이고, $d_{n+1} = \boxed{\text{(나)}}$ 이다.

$\therefore A^n = \boxed{\text{(다)}}$ 이다.

이 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [3점]

	(가)	(나)	(다)
①	$\frac{1}{2}$	2^n	$\begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$
②	$\frac{1}{2}$	2^{n+1}	$\begin{pmatrix} 1 & 2^{n+1} \\ 0 & 2^n - 1 \end{pmatrix}$
③	1	2^n	$\begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$
④	1	2^{n+1}	$\begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$
⑤	1	2^{n+1}	$\begin{pmatrix} 1 & 2^n \\ 0 & 2^n - 1 \end{pmatrix}$

14. 그림은 단계별로 만들어지는 어떤 입체를 위에서 본 모양과 앞에서 본 모양을 나타낸 것이다.

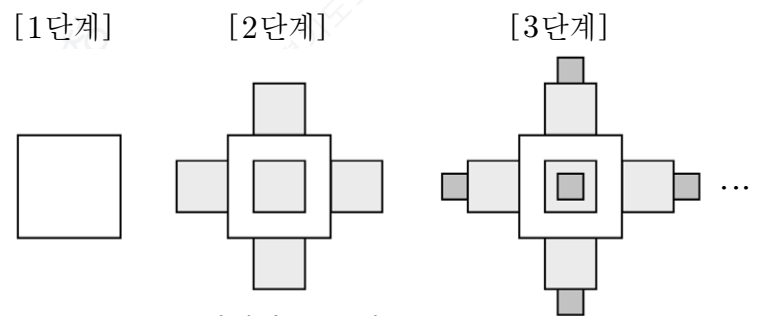
[1단계] 한 모서리의 길이가 1인 정육면체를 평면 위에 놓는다.

[2단계] [1단계] 입체에 한 모서리의 길이가 $\frac{1}{2}$ 인 정육면체를 위, 왼쪽, 오른쪽, 앞, 뒤에 각각 1개씩 붙인다.

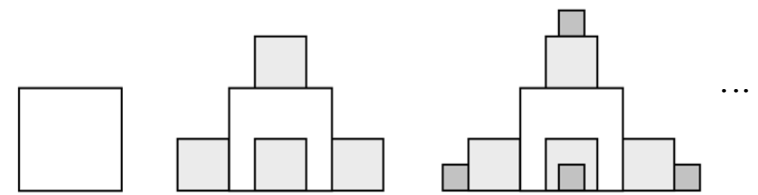
[3단계] [2단계] 입체에 한 모서리의 길이가 $\frac{1}{2^2}$ 인 정육면체를 위, 왼쪽, 오른쪽, 앞, 뒤에 각각 1개씩 붙인다.

⋮

이와 같은 과정을 계속하여 [n단계]에서 얻어진 입체의 부피를 V_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n$ 의 값은? [4점]



<위에서 본 모양>



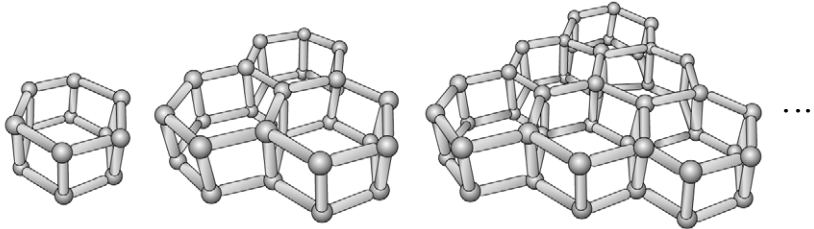
<앞에서 본 모양>

- ① $\frac{8}{7}$
 ② $\frac{9}{7}$
 ③ $\frac{10}{7}$
 ④ $\frac{11}{7}$
 ⑤ $\frac{12}{7}$

15. 그림과 같이 쇠구슬과 막대자석을 이용하여

육각기둥 모양을 1개 만드는 데 필요한 막대자석의 개수를 a_1 ,
육각기둥 모양을 3개 만드는 데 필요한 막대자석의 개수를 a_2 ,
육각기둥 모양을 6개 만드는 데 필요한 막대자석의 개수를 a_3 ,
⋮

이와 같은 과정을 계속하였을 때, a_{10} 의 값은? [4점]



- ① 530
- ② 531
- ③ 532
- ④ 533
- ⑤ 534

16. 이차정사각행렬 A, B 에 대하여 <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고르면? (단, O 는 영행렬, E 는 단위행렬, X^{-1} 는 X 의 역행렬이다.) [4점]

< 보 기 >

- ㉠. $A^3 = O$ 이면 $A^2 = O$ 이다.
- ㉡. $A + B = E$ 이면 $AB = BA$ 이다.
- ㉢. $AB = A + B$ 이면 $(A - E)^{-1} = B - E$ 이다.

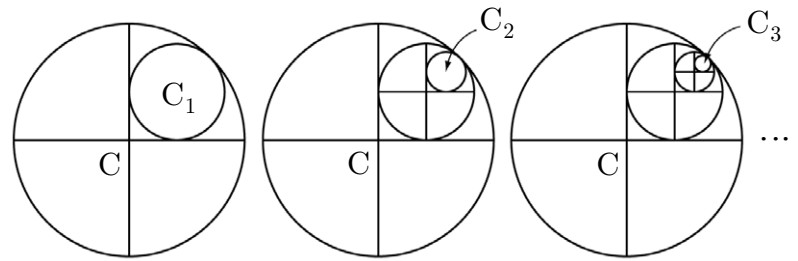
- ① ㉠
- ② ㉡
- ③ ㉠, ㉡
- ④ ㉡, ㉢
- ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

17. 반지름의 길이가 1인 원 C 가 있다.

원 C 를 사분원으로 나누어 한 사분원에 내접하는 원을 C_1 ,
원 C_1 을 사분원으로 나누어 한 사분원에 내접하는 원을 C_2 ,
원 C_2 를 사분원으로 나누어 한 사분원에 내접하는 원을 C_3 ,
⋮

이와 같은 과정을 계속하여 얻어진 원 C_n 의 반지름의 길이를 r_n 이라

할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n r_k$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{1}{2}$
- ② $\frac{1 + \sqrt{2}}{4}$
- ③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- ④ $\frac{2 + \sqrt{2}}{4}$
- ⑤ 1

단답형

18. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$3n^2 - 5n - 1 < a_n < 3n^2 + n + 2$$

를 만족시킬 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2 + 2n + 2}$ 의 값을 구하시오. [3점]

6

수리 영역(나형)

19. 두 행렬 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ 에 대하여

$2A + X = 2(X + B) - A$ 를 만족시키는 행렬 X 의 모든 성분의 합을 구하시오. [3점]

21. 행렬 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ 에 대하여

$E + A + A^2 + A^3 + \cdots + A^9 = aA + bE$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 상수이고 E 는 단위행렬이다.) [3점]

20. x, y 에 대한 일차연립방정식 $\begin{pmatrix} a & 3a \\ 1 & 2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 가 $x = y = 0$

이외의 해를 갖도록 하는 정수 a 의 값을 구하시오. [3점]

22. 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_3 = -2$, $a_9 = 46$ 일 때,

$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_{10}|$ 의 값을 구하시오. [3점]

23. $\log_{10} 243 = 2.3856$, $\log_{10} 0.0541 = -1.2668$ 일 때,
 $2430^{10} \div 541$ 은 정수부분이 n 자리수이다.
 이 때, n 의 값을 구하시오. [4점]

25. $1 < a < 10$ 인 a 에 대하여 $\log_{10} a^3$ 의 가수와 $\log_{10} \sqrt{a}$ 의 가수의
 합이 1이 될 때, 모든 a 의 값의 곱을 $10^{\frac{q}{p}}$ 이라 하자. 이 때,
 $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p, q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

24. 수열 $\{a_n\}$ 이

$$\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = 7 \\ a_{k+4} = 2a_k \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

 으로 정의될 때, $\sum_{k=1}^{20} a_k$ 의 값을 구하시오. [4점]

5 지 선 다 형

26. 어느 회사원이 2011년 초에 200만원을 적립하고 다음 해부터
 매년 초에 전년도 적립금액의 5%를 증액하여 적립하기로 하였다.
 2030년 말까지 적립되는 원리합계는? (단, 연이율 5%, 1년마다의
 복리로 계산하고, $(1.05)^{20} = 2.65$ 로 계산한다.) [3점]

- ① 9600만원
- ② 10600만원
- ③ 11600만원
- ④ 12600만원
- ⑤ 13600만원

27. 수열 $\{a_n\}$ 이

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{4} \\ a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n^2 + 2n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

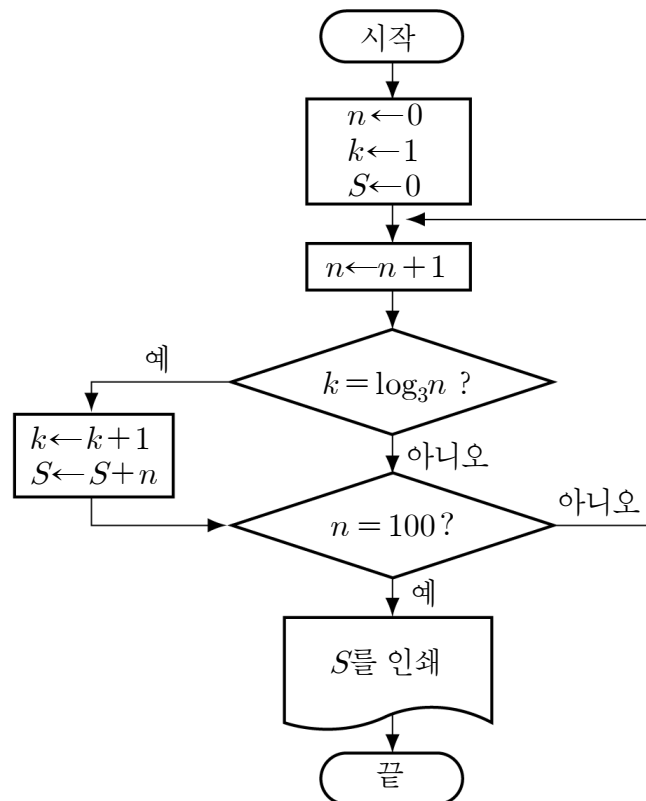
으로 정의될 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{2}$
 ② $\frac{3}{4}$
 ③ 1
 ④ $\frac{5}{4}$
 ⑤ $\frac{3}{2}$

28. $x - y = 2$, $2^x + 2^{-y} = 5$ 일 때, $8^x + 8^{-y}$ 의 값은? [3점]

- ① 61
 ② 62
 ③ 63
 ④ 64
 ⑤ 65

29. 다음 순서도에서 인쇄되는 S 의 값은? [4점]



- ① 39
 ② 81
 ③ 120
 ④ 243
 ⑤ 363

단답형

30. 2007^n 을 5로 나눈 나머지를 a_n 이라 할 때, $100 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{4n}}{3^n}$ 의 값을 구하시오. [4점]

※ 확인사항

○ 문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.