

제 2 장

수열

1 등차수열

문제 1. 고대 이집트의 수학 문헌인 아메스 파피루스(기원전 1650 경)에는 다음과 같은 문제가 기록되어 있다.

다섯 사람에게 120 개의 빵을 나누어주는데 각자의 배당몫이 등차수열을 이루고, 가장 적게 배당 받는 사람과 그 다음으로 적게 배당 받는 사람의 몫의 합이 나머지 세 사람 몫의 합의 $\frac{1}{7}$ 이 되도록 하라.

위와 같이 빵을 나누어 줄 때, 가장 많이 배당 받는 사람의 몫은? [’94-1 차 수능]

- ① 52 ② 50 ③ 48 ④ 46 ⑤ 44

(풀이) 5명이 등차수열을 이루므로 5명의 몫을 각각 $a - 2d$, $a - d$, a , $a + d$, $a + 2d$ 라 놓으면 주어진 조건으로 부터 $5a = 120$ 에서 $a = 24$ 를 얻고 $24 - 2d + 24 - d = \frac{1}{7}(24 + 24 + d + 24 + 2d)$ 에서 $d = 11$ 을 얻는다.

그러므로 가장 많이 배당 받는 사람의 몫은 $a + 2d = 46$ 이다. 답 ④

[key] 5명의 몫이 등차수열 : $a - 2d, a - d, a, a + d, a + 2d$

3명의 몫이 등차수열이라면 $a - d, a, a + d$

즉, 좌우대칭형으로 나타내는 것이 편리

문제 2. 등차수열 $\{a_n\}$ 이 $a_2 = 3$, $a_5 = 24$ 일 때, a_7 의 값을 구하시오. [08수능, 3점]

(풀이) $a_2 = a + d = 3 \cdots \cdots \textcircled{1}$

$a_5 = a + 4d = 24 \cdots \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{2} - \textcircled{1}$ 을 하면 $3d = 21$

$\therefore d = 7, a = -4 \therefore a_7 = a + 6d = (-4) + 42 = 38$ 답 38

[key] 등차수열의 일반항

문제 3. 다음과 같이 정사각형을 가로 방향으로 3 등분하여 [도형 1]을 만들고, 세로 방향으로 3 등분하여 [도형 2]를 만든다.

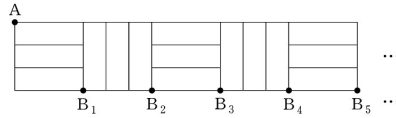


[도형 1]



[도형 2]

[도형 1]과 [도형 2]를 번갈아 가며 계속 붙여 아래와 같은 도형을 만든다.



그림과 같이 첫 번째 붙여진 [도형 1]의 왼쪽 맨 위 꼭지점을 A라 하고, [도형 1]의 개수와 [도형 2]의 개수를 합하여 n 개 붙여 만든 도형의 오른쪽 맨 아래 꼭지점을 B_n 이라 하자. 꼭지점 A에서 꼭지점 B_n 까지 선을 따라 최단거리로 가는 경로의 수를 a_n 이라 할 때, $a_3 + a_7$ 의 값은? [08수능 4점]

- ① 34 ② 32 ③ 30 ④ 28 ⑤ 26

(풀이) A에서 B_n 까지 가는 경우의 수를 a_n 이라 하면 A에서 B_{n+1} 까지 가는 경우의 수는 B_n 을 거쳐가는 경우 a_n (가지)와 B_n 을 거쳐가지 않는 경우 3가지가 있다. $\therefore a_{n+1} = a_n + 3$

$a_1 = 4 \therefore a_n = 3n + 1$

$a_3 + a_7 = 10 + 22 = 32$ 답 ②

문제 4. 첫째항이 m , 공차가 1인 등차수열의 첫째 항부터 제 n 항까지의 합이 50일 때, $m + n$ 의 값은? (단, $m \leq 10$ 인 자연수) [’94-2 차 수능]

- ① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 17

(풀이) 첫째항이 m , 공차가 $d = 1$ 이므로 $a_k = m + (k - 1)d = m + k - 1$, n 항까지의 합은 $\sum_{k=1}^n (m + k - 1) = \frac{n(2m + n - 1)}{2} = 50$ 이므로 $n(2m + n - 1) = 100$ 이라는 부정방정식에서 n, m 자연수라는 조건이 붙었으므로 부정방정식의 정수 조건(자연수도 정수이므로)을 이용하여 $n = 5, m = 8$ 을 찾을 수 있다. $\therefore n + m = 13$ 답 ①

[별해] $1 + 2 + \cdots + 10 = 55$

$1 + 2 + \cdots + 9 = 45$

$(1 + 9) + (2 + 8) + (3 + 7) + (4 + 6) + (5 + 5) = 50$

$5 + 5$ 에서 5, 5는 공차가 1인 등차수열이 아닌 점이 문제점

즉, $50 = 10 + 10 + 10 + 10 + 10$ 인 형태를 취하면서 공차가 1인 등차수열을 만들 수가 없습니다.

$50 = 20 + 20 + 10 = (8 + 12) + (9 + 11) + 10 = 8 + 9 + 10 + 11 + 12$

문제 5. 첫째항이 0이고 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 수열 $\{b_n\}$ 이 $a_{n+1}b_n = \sum_{k=1}^n a_k$ 를 만족시킬 때, b_{27} 의 값을 구하시오. [07수능, 4점]

(풀이) $a_n = 0 + (n - 1)d = (n - 1)d$

$a_{n+1}b_n = \sum_{k=1}^n a_k$

2 제 2 장 수열

$$\Rightarrow ndb_n = \sum_{k=1}^n (k-1)d = \frac{n\{0+(n-1)d\}}{2}$$

$$\Rightarrow ndb_n = \frac{n(n-1)d}{2} \Rightarrow b_n = \frac{n-1}{2}$$

$$\therefore b_{27} = \frac{27-1}{2} = \frac{26}{2} = 13 \text{ 답 } 13$$

[key] 등차수열의 일반항

문제 6. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_5 = 4a_3$, $a_2 + a_4 = 4$ 가 성립할 때, a_6 의 값은? [06 수능, 2점]

- ① 5 ② 8 ③ 11 ④ 13 ⑤ 16

(풀이) a_2, a_3, a_4 는 이 순서로 등차수열을 이루므로

$$a_3 = \frac{a_2 + a_4}{2} = 2$$

$$\therefore a_5 = 4a_3 = 8$$

이 때, 공차를 d 라 하면 $a_5 = a_3 + 2d$ 이므로 $8 = 2 + 2d$

$$\therefore d = 3$$

$$\therefore a_6 = a_5 + d = 8 + 3 = 11 \text{ 정답 } ③$$

[key] 등차수열의 일반항, 등차중항

문제 7. 등차수열 a_n 에 대하여 $a_1 + a_2 = 10$, $a_3 + a_4 + a_5 = 45$ 가 성립할 때, a_{10} 의 값은? [05 수능 2점]

- ① 47 ② 45 ③ 43 ④ 41 ⑤ 39

(풀이) 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a_1 , 공차를 d 라 하면 $a_1 + a_2 = 10$ 에서 $a_1 + (a_1 + d) = 10$

$$\therefore 2a_1 + d = 10 \dots\dots ㉠$$

$$a_3 + a_4 + a_5 = 45 \text{에서 } (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) + (a_1 + 4d) = 45$$

$$\therefore a_1 + 3d = 15 \dots\dots ㉡$$

$$2 \times ㉠ - ㉡ \text{을 하면 } 5d = 20 \therefore d = 4, a_1 = 3$$

$$\therefore a_{10} = a_1 + 9d = 39 \text{ 답 } ⑤$$

[별해] 등차중항의 개념을 최대한 이용하는 방법을 써봅시다.

$$a_3 + a_4 + a_5 = 3a_4 = 45 \Rightarrow a_4 = 15$$

$$a_1 + a_2 + (a_3 + a_4 + a_5) = 5a_3 = 10 + 45 = 55 \Rightarrow a_3 = 11$$

$$\therefore d = 4$$

$$a_{10} = a_4 + 6d = 15 + 6 \cdot 4 = 15 + 24 = 39$$

문제 8. 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 + a_5 + a_9 = 45$ 일 때, $a_1 + a_{10}$ 의 값을 구하시오. [09 수능, 3점]

(풀이) 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차가 2이므로 $a_1 + a_5 + a_9 = a_1 + (a_1 + 4 \cdot 2) + (a_1 + 8 \cdot 2) = 3a_1 + 24 = 45$

$$\text{따라서 } 3a_1 = 21 \text{에서 } a_1 = 7 \text{이므로 } a_1 + a_{10} = a_1 + (a_1 + 9 \cdot 2) = 2a_1 + 18 = 2 \cdot 7 + 18 = 32$$

[정답] 32

[별해] $\{a_n\}$ 이 등차수열이므로 $a_1 + a_9 = 2a_5 \Rightarrow a_1 + a_9 = \frac{2}{3} \times 45 = 30$
 $\therefore a_1 + a_{10} = a_1 + (a_9 + 2) = (a_1 + a_9) + 2 = 32$

[key] 등차수열의 일반항, 등차중항

2 등비수열

문제 9. 정부가 통일 이후 필요한 통일비용을 마련하기 위해 예산의 일부를 2001년부터 매년 1월 1일 적립한다고 하자. 적립할 금액은 경제성장률을 감안하여 매년 전년도보다 6%씩 증액한다. 2001년 1월 1일부터 10조원을 적립하기 시작한다면 2010년 12월 31일까지 적립된 금액의 원리합계는 몇 조 원인가? (단, 연이율 6%, 1년마다의 복리로 계산하고 $(1.06)^{10} = 1.8$ 이다.) [’98 수능 4점]

- ① 160 ② 162 ③ 180

- ④ 198 ⑤ 220

(풀이) 매년 초에 적립하는 금액

2001년 1월 1일: 10조원

2002년초: 10조 $\times (1 + 0.06)$

2003년초: 10조 $\times (1 + 0.06)^2$

⋮

⋮

2010년초: 10조 $\times (1 + 0.06)^9$

은행에 적립하게 되면서 발생하는 실제 가치

2001년초: 10(조) $\times (1 + 0.06)^{10} \leftarrow$ 10년동안 은행에 예치하게 되므로 10년간의 복리이자 발생

2002년초: $\{10 \times (1 + 0.06)\} \times (1 + 0.06)^9 \leftarrow$ 9년동안 은행에 예치하게 되므로 9년간의 복리이자 발생 ...

적립된 금액의 원리합계는

$$10\text{조}(1.06)^{10} + \{10\text{조}(1.06)^1\}(1.06)^9 + \{10\text{조}(1.06)^2\}(1.06)^8 + \dots + \{10\text{조}(1.06)^{10}\}(1.06)^1 = \{10\text{조}(1.06)^{10}\}10 = 10\text{조}1.810 = 180\text{조 (원) 답 } ③$$

문제 10. 세 수 $a, 0, b$ 가 이 순서로 등차수열을 이루고, 세 수 $2b, a, -7$ 이 이 순서로 등비수열을 이룰 때, a 의 값은? [07 수능, 3점]

- ① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

(풀이) $a, 0, b$ 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 등차중항 공식에 의해 $2 \times 0 = a + b$

$$\therefore a + b = 0, b = -a \dots\dots ㉠$$

$2b, a, -7$ 이 순서대로 등비수열을 이루므로 등비중항공식에 의해 $a^2 = 2b \times (-7)$

$$\therefore a^2 = -14b \dots\dots ㉡$$

$$㉠ \text{을 } ㉡ \text{에 대입하면, } a^2 = -14 \times (-a), a^2 = 14a$$

$$\therefore a = 0, 14$$

$a = 0$ 이면 $0, 0, -7$ 이 등비수열을 이루지 않으므로 모순이다.

따라서, $a = 14$ 답 ③

[key] 중항

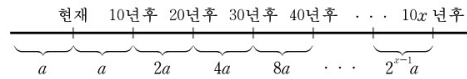
문제 11. 다음은 세계 석유 소비 증가 추세에 관한 글들이다.

..... 매년 석유 소비량을 조사한 결과, 최근 10년 동안 소비된 석유의 양은 그 이전까지 소비된 석유의 양과 같다. 예를 들어 1981년부터 1990년까지 소비된 석유의 양은 1980년까지 소비된 석유 전체의 양과 같다.

이와 같은 석유 소비 추세가 계속된다고 가정하고, 현재까지 소비된 석유의 양을 a , 현재의 석유의 매장량을 b 라 할 때, 앞으로 몇 년 동안 석유를 사용할 수 있겠는가? [’01 수능 3점]

- ① $10 \log_2(\frac{b}{2a} + 1)$ ② $10 \log_2(\frac{b}{a} + 1)$
 ③ $10 \log_2(\frac{2b}{a} + 1)$ ④ $10 \log_2(\frac{b}{a} + 2)$
 ⑤ $10 \log_2(\frac{2b}{a} + 2)$

(풀이) 석유 소비량의 변화를 그림으로 나타내면



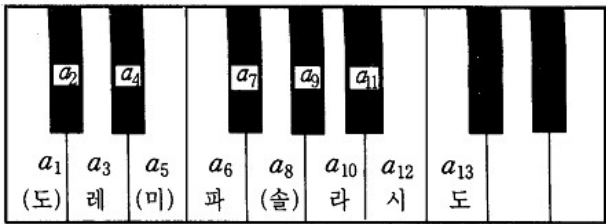
따라서 10년이 x 회만큼 지난 후에 현재의 석유매장량 b 가 모두 소모된다고 하면 $a + 2a + 4a + 8a + \dots + 2^{x-1}a = b$

$$\frac{2^x - 1}{2 - 1} a = b$$

$$\Rightarrow 2^x = \frac{b}{a} + 1 \quad \therefore x = \log_2\left(\frac{b}{a} + 1\right)$$

앞으로 석유를 사용할 수 있는 기간은 $10 \log_2\left(\frac{b}{a} + 1\right)$ (년) 답 ②

문제 12. 서양음악의 12 음계에서 음의 주파수는 반음 올라갈 때마다 일정 비율로 높아져 12 반음 올라가면 2배가 되는 등비수열을 이룬다. 아래 피아노 건반에 표시된 도, 미, 솔의 주파수비 $a_1 : a_5 : a_8$ 에 가장 가까운 정수비는?



(단, $2^{\frac{1}{3}} = \frac{5}{4}, 2^{\frac{5}{12}} = \frac{4}{3}, 2^{\frac{7}{12}} = \frac{3}{2}$ 으로 근사하여 계산한다.) [’99 수능 3점]

- ① 2 : 3 : 4 ② 3 : 4 : 5 ③ 4 : 5 : 6
 ④ 5 : 6 : 8 ⑤ 6 : 8 : 9

(풀이) $a_1 r^{12} = 2a_1$ 이므로 $r^{12} = 2 \therefore r = 2^{\frac{1}{12}}$

$$a_1 : a_5 : a_8 = a_1 : a_1 r^4 : a_1 r^7 = a_1 : a_1 2^{\frac{4}{12}} : a_1 2^{\frac{7}{12}} = 1 : 2^{\frac{1}{3}} : 2^{\frac{7}{12}} = 1 : \frac{5}{4} : \frac{3}{2} = 4 : 5 : 6 \text{ 답 ③}$$

[key] 식으로 나타내기가 풀이의 관건이 됩니다.

문제 13. 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_3 = 2, a_6 = 16$

일 때, a_9 의 값을 구하시오. [07 수능, 3점]

(풀이) 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면 $a_3 = ar^2 = 2 \dots\dots\dots \textcircled{\text{A}}$

$$a_6 = ar^5 = 16 \dots\dots\dots \textcircled{\text{B}}$$

$$\textcircled{\text{A}}, \textcircled{\text{B}} \text{에서 } r^3 = 8$$

$$\therefore r = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow a_9 = ar^8 = \frac{1}{2} \cdot 2^8 = 128 \text{ 답 128}$$

[key] 등비수열의 일반항

문제 14. 공비가 r 이고 $a_2 = 1$ 인 등비수열 $\{a_n\}$ 에

서 첫째항부터 제10항까지의 곱을 $\omega = a_1 a_2 a_3 \dots a_{10}$

이라 할 때, $\log_r \omega$ 의 값을 구하시오. (단, $r > 0$ 이고

$r \neq 1$ 이다.) [05 수능 3점]

(풀이) $a_2 = a_1 r = 1, a_1 = \frac{1}{r},$

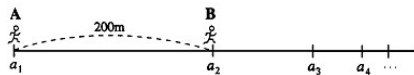
$$\omega = \frac{1}{r} \cdot 1 \cdot r \cdot r^2 \dots\dots\dots r^8 = r^{2+3+\dots+8} = r^{35}$$

$$\therefore \log_r \omega = \log_r r^{35} = 35 \text{ 답 35}$$

[key] 등비수열의 일반항, 지수법칙, 로그의 계산

문제 15. 다음 그림과 같이 A 와 B 가 직선 위를 따

라 같은 방향으로 달린다.



B 는 A 보다 $200m$ 앞에서 A 와 동시에 출발한다. A

의 출발점을 a_1 , B 의 출발점을 a_2 , A 가 a_2 에 도달했

을 때, B 의 위치를 a_3 , A 가 a_3 에 도달했을 때, B 의

위치 a_4 라고 하자. 이와 같은 방법으로 계속하여 점

$a_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 을 정한다. A 의 속도가 B 의 속도

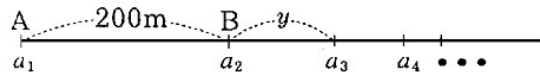
의 2배이면, A 와 B 사이의 거리가 $1m$ 이내가 되기

시작할 때 A 의 위치는? [’97 수능 3점]

- ① a_4 와 a_5 사이 ② a_6 과 a_7 사이
 ③ a_8 과 a_9 사이 ④ a_{10} 과 a_{11} 사이
 ⑤ a_{12} 와 a_{13} 사이

(풀이) 속도 = $\frac{\text{거리}}{\text{시간}} \Rightarrow \text{시간} = \frac{\text{거리}}{\text{속도}}$

B 의 속도를 x 라 하면 A 의 속도는 $2x$



$$a_2 \text{에서 } a_3 \text{까지의 거리를 } y \text{라 하면 } \frac{y}{x} = \frac{200}{2x} \therefore y = 100$$

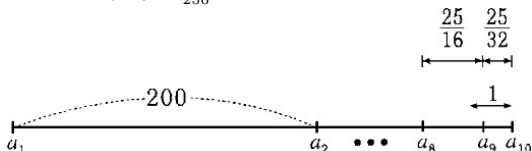
A 와 B 사이의 거리 $P_n = \overline{a_n a_{n+1}}$ 이라 두면,

수열 $\{P_n\}$ 은 $200, 100, 50, 25, \dots, P_n, \dots$

$$P_n = 200 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$n = 8 \text{일 때, } P_8 = 200 \times \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{200}{128} > 1$$

$$n = 9 \text{일 때, } P_9 = \frac{200}{256} < 1$$



4 제 2 장 수열

따라서, A 의 위치는 a_8 과 a_9 사이이다. 답 ③

[주의] 최종적으로 A 의 위치를 정할 때, a_9 와 a_{10} 사이라고 오판하지 마세요.

[참고] 수능 문제 출제의 방식을 이해한다면, 즉 문제의 그림이 정확하다는

점을 명심하고 있다면 $\overline{a_2 a_3} = \frac{1}{2} \overline{a_1 a_2}$, $\overline{a_3 a_4} = \frac{1}{2} \overline{a_2 a_3}$, ... 임을 쉽게 알 수 있다. 어떤 방법으로?

문제 16. 네 수 1, a , b , c 는 이 순서대로 공비가 r 인 등비수열을 이루고 $\log_8 c = \log_a b$ 를 만족시킨다. 공비 r 의 값은? (단, $r > 1$) [09수능, 3점]

- ① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

(풀이) $a = r$, $b = r^2$, $c = r^3$ 이므로

$$\log_8 c = \log_{2^3} r^3 = \log_2 r$$

$$\log_a b = \log_r r^2 = 2$$

따라서, $\log_8 c = \log_a b$ 에서 $\log_2 r = 2$

$$\therefore r = 2^2 = 4 \text{ [정답] ⑤}$$

[key] 등비수열의 일반항, 로그의 계산

3 시그마 계산법

문제 17. 함수 $f(x)$ 가 $f(10) = 50$, $f(1) = 3$ 을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^9 f(k+1) - \sum_{k=2}^{10} f(k-1)$ 의 값을 구하시오.

[’01 수능 3점]

(풀이) $\sum_{k=1}^9 f(k+1) = f(2) + f(3) + \dots + f(10)$

$$\sum_{k=2}^{10} f(k-1) = f(1) + f(2) + \dots + f(9)$$

$$\therefore \sum_{k=1}^9 f(k+1) - \sum_{k=2}^{10} f(k-1) = f(10) - f(1) = 50 - 3 = 47$$

답 47

[key] Σ 의미

문제 18. 아래와 같이 나열된 55개의 수를 모두 더하면? [’94-1차 수능]

1
2 4
3 6 9
4 8 12 16
5 10 15 20 25
6 12 18 24 30 36
7 14 21 28 35 42 49
8 16 24 32 40 48 56 64
9 18 27 36 45 54 63 72 81

10 20 30 40 50 60 70 80 90 100

- ① 1755 ② 1705 ③ 1655
④ 1605 ⑤ 1555

(풀이) 각 줄을 G_n 이라 하여 군을 만들어 보면 각 G_n 군의 숫자들은 첫항이 n , 공차가 n , 항수도 n 인 수열이다.

$$\text{그러므로 각 } G_n \text{ 군의 합을 } S_n \text{이라 하면 } S_n = \sum_{k=1}^n kn = \frac{n^2(n+1)}{2}$$

$$[참고] S_1 = 1, S_2 = 2 + 4 = 2(1+2), S_3 = 3 + 6 + 9 = 3(1+2+3), \dots, S_n = n(1+2+3+\dots+n) = n \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

$$10 \text{군까지의 총합은 } \sum_{k=1}^{10} \frac{k^3+k^2}{2} = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{10 \cdot 11}{2} \right)^2 + \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} \right\} = 1705 \text{ 답 ②}$$

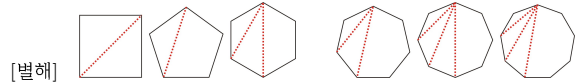
[key] 규칙성 찾기, 군수열, Σ 계산

문제 19. 자연수 $n(n \geq 4)$ 에 대하여 $A_n = \{x | x \text{는 한 변의 길이가 1인 정 } n \text{각형의 대각선의 길이}\}$ 라고 하고, a_n 을 집합 A_n 의 원소의 개수라 하자.

예를 들어 $a_4 = 1$ 이다. 이 때, $\sum_{n=4}^{25} a_n$ 의 값은? [’94-1차 수능]

- ① 140 ② 138 ③ 136
④ 134 ⑤ 132

(풀이) n 이 짝수일 때, $a_n = \frac{n}{2} - 1$, n 이 홀수일 때, $a_n = \frac{n-3}{2}$ 이므로 $\sum_{n=4}^{25} a_n = \sum_{k=2}^{12} a_{2k} + \sum_{k=2}^{12} a_{2k+1} = 2 \sum_{k=2}^{12} (k-1) = 2 \sum_{k=1}^{12} (k-1) = 2 \left(\frac{12 \cdot 13}{2} - 12 \right) = 132$ 답 ⑤



[별해]

$$a_4 = 1, a_5 = 1, a_6 = 2, a_7 = 2, a_8 = 3, a_9 = 3, \dots$$

$$(a_4 + a_5) + (a_6 + a_7) + \dots + (a_{24} + a_{25}) = (1+1) + (2+2) + \dots + (11+11) = 2(1+2+\dots+11) = 2 \times 66 = 132$$

[key] 문제의 이해, 규칙성 찾기

문제 20. 어떤 원자의 에너지는 주양자수 n 에 의해서 결정된다. 주양자수가 n 인 에너지 상태에는 $2n^2$ 개의 서로 다른 궤도가 존재한다. 주양자수가 $n = 1, 2, 3, \dots, 9$ 인 에너지 상태에 있는 모든 궤도의 수는? (단, 주양자수가 다른 에너지 상태에 있는 궤도들은 서로 다르다.) [’00 수능 3점]

- ① 770 ② 570 ③ 408
④ 350 ⑤ 182

(풀이) 주양자수가 n 일 때의 서로 다른 궤도의 수가 $2n^2$ 이므로 $n = 1, 2, 3, \dots, 9$ 에 대응되는 n 의 모든 궤도의 수는 $\sum_{k=1}^9 2k^2 = 2 \sum_{k=1}^9 k^2 = 2 \cdot \frac{9 \cdot 10 \cdot 19}{6} = 570$ 답 ②

[key] Σ 계산

문제 21. 자연수 $n(n \geq 2)$ 으로 나누었을 때, 몫과 나머지가 같아지는 자연수를 모두 더한 값을 a_n 이라 하자. 예를 들어 4로 나누었을 때, 몫과 나머지가 같아지는 자연수는 5, 10, 15 이므로 $a_4 = 5 + 10 + 15 = 30$ 이다. $a_n > 500$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값을 구하시오. [09 수능, 4 점]

(풀이) n 으로 나누었을 때 몫과 나머지가 같아지는 자연수는 $n + 1, 2n + 2, 3n + 3, 4n + 4, \dots, (n-1)n + (n-1)$ 의 $n-1$ 개다.

$$\therefore a_n = \sum_{k=1}^{n-1} (kn + k) = (n+1) \sum_{k=1}^{n-1} k = (n+1) \cdot \frac{(n-1)n}{2}$$

$$a_n > 500 \text{ 에서 } \frac{(n-1)n(n+1)}{2} > 500$$

$$(n-1)n(n+1) > 1000$$

$$9 \cdot 10 \cdot 11 = 990 < 1000$$

$$10 \cdot 11 \cdot 12 = 1320 > 1000 \text{ 이므로 구하는 자연수 } n \text{ 의 최솟값은 } 11 \text{ 이다.}$$

[정답] 11

[key] 규칙성 찾기

일단 문제에서 주어진 $a_4 = 5 + 10 + 15 = 5(1 + 2 + 3)$ 이 웬지 낮익지 않나요? 혹시 $a_5 = 6(1 + 2 + 3 + 4)$ 가 아닐까요?

$$a_2 = 3 = 3 \cdot 1 \leftarrow a_2 = 2Q + R = 2k + k = 3k$$

$$a_3 = 4 + 8 = 4(1 + 2) \leftarrow a_3 = 3Q + R = 3k + k = 4k$$

$$a_4 = 5 + 10 + 15 = 5(1 + 2 + 3)$$

$$a_5 = 6(1 + 2 + 3 + 4), \dots$$

4 계차수열

문제 22. 다음과 같이 1부터 연속된 자연수가 규칙적으로 나열되어 있다.

1 행 1
2 행 2 3
3 행 4 5 6
4 행 7 8 9 10
5 행 11 12 13 14 15
⋮
10 행

10 행의 마지막에 들어갈 수는? [’98 수능 3 점]

① 45 ② 50 ③ 55 ④ 60 ⑤ 65

(풀이) 각 행의 마지막에 들어가고 있는 수는 1행부터 각 행까지의 항의 개수이다.

1행에는 1개, 2행에는 2개, 3행에는 3개, ..., 10행에는 10개의 수가 차례로 나열되어 있으므로, 1행부터 10행까지의 항의 개수는 55개다.

따라서, 10행의 마지막에 들어갈 수는 55이다. 답 ③

[key] 규칙성 찾기

[별해] 각 행의 마지막 수만을 모아 수열 $\{a_n\}$ 이라 하자. 즉, $\{a_n\}$: 1, 3, 6, 10, 15, ...

$b_n = a_{n+1} - a_n$ 인 $\{a_n\}$ 의 계차수열 $\{b_n\}$ 을 생각해보자.

$\{b_n\}$: 2, 3, 4, 5, ... $\rightarrow$ 첫째항은 2, 공차 $d = 1$ 인 등차수열

$$\therefore a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \{2 + (k-1)1\} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (k+1) \\ = 1 + \frac{(n-1)(2+n)}{2} \Rightarrow a_{10} = 1 + \frac{9 \cdot 12}{2} = 1 + 54 = 55$$

[key] 계차수열을 이용한 일반항 구하기

[별해] 구체적으로 나열해보기

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55

문제 23. 수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 10$ 이고, 수열 $\{a_{n+1} - a_n\}$ 은 등비수열일 때, a_5 의 값을 구하시오. [06 수능, 3 점]

(풀이) $a_2 - a_1 = 3$, $a_3 - a_2 = 3 \cdot 2$

여기서, $\{a_{n+1} - a_n\}$ 은 등비수열이므로 위에서 공비 $r = 2$ 이라는 사실을 알 수 있다.

$$\therefore a_4 - a_3 = 3 \cdot 2^2, a_5 - a_4 = 3 \cdot 2^3$$

$\leftarrow$ 구체적으로 구하기 방법

$$\therefore a_5 = a_4 + 24 = (a_3 + 12) + 24 = 10 + 12 + 24 = 46 \quad \text{답 } 46$$

[별해] 계차수열을 이용한 일반항 구하기 방법으로 풀어보세요.

$$b_n = a_{n+1} - a_n = (a_2 - a_1)r^{n-1} = (4-1)r^{n-1} \text{ 에서}$$

$$a_2 - a_1 = 3, a_3 - a_2 = 6 \text{ 이므로 } r = 2$$

$$\text{따라서 } a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 3 \cdot 2^{k-1}$$

$$= 1 + \frac{3(2^{n-1}-1)}{2-1} = 1 + 3(2^{n-1}-1)$$

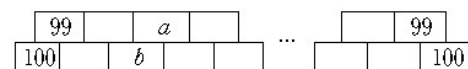
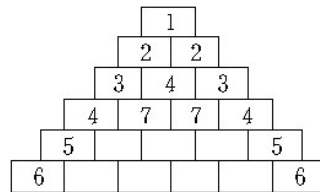
$$\therefore a_5 = 1 + 3(2^4 - 1) = 1 + 3 \cdot 15 = 46$$

[key] 계차수열을 이용한 일반항 구하기

문제 24. 그림과 같이 제 1행에는 1개, 제 2행에는 2개, ..., 제 100행에는 100개의 직사각형을 나열하고 그 안에 다음과 같은 규칙으로 수를 써넣었다.

(규칙 1) 각 행의 양쪽 끝 직사각형에는 1부터 100까지의 자연수를 순서대로 써넣는다.

(규칙 2) 각 행의 안쪽 직사각형에는 바로 위 행의 인접한 직사각형에 쓰인 두 수의 합을 써넣는다.



이 때, $b - a$ 의 값은? [’03 수능 3 점]

① 4878 ② 4872 ③ 4864
④ 4858 ⑤ 4852

(풀이) 구하고자 하는 것은 $b - a$ 인데 (규칙 2)에 의해 제 99행의 (두 번째 수) + $a = b$ 이므로 $b - a$ 는 제 99행의 두 번째 수를 구하라는 뜻이다.

6 제 2 장 수열

2번째 행부터 2번째 칸에 있는 수를 나열하여 수열 $\{a_n\}$ 을 구하면
 $\{a_n\} : 2, 4, 7, 11, 16, \dots$

([주의] 여기서 잘못 생각하면 제 99행의 두번째 수를 구하는 것을 a_{99} 이라고 착각할 수 있다. 2번째 행의 2번째 수가 a_1 이라는 점에 주의해야 한다.)

$\therefore$ 우리가 구해야 할 것은 a_{99} 가 아니라 a_{98} 의 값이다.)

즉, 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째 항이 2이고 계차수열 $b_n = n + 1$ 인 수열을 가지므로 a_{98} 을 구하면

$$a_{98} = 2 + \sum_{k=1}^{97} (k+1) = 2 + \sum_{k=1}^{97} k + 97 = 99 + \frac{97 \cdot 98}{2} = 4852$$

따라서, 99행의 2번째 숫자는 4852이고 주어진 (규칙 2)에서 $4852 + a = b$

$\therefore b - a = 4852$ 답 ⑤

[key] 계차수열을 이용한 일반항 구하기, 문제의 조건이 파스칼의 삼각형과 약간 달랐다.

5 군수열

문제 25. 1이 두 번만 나타나는 이진법의 수를 작은 수부터 차례로 배열하여 얻은 수열

$11_{(2)}, 101_{(2)}, 110_{(2)}, 1001_{(2)}, 1010_{(2)}, 1100_{(2)}, \dots$

의 제 56항과 같은 수는? [’00 수능 3점]

- ① $2^9 + 1$ ② $2^{10} + 2^9$ ③ $2^{11} + 1$
 ④ $2^{11} + 2^{10}$ ⑤ $2^{13} + 1$

(풀이) 주어진 이진법의 수열을 같은 자리수를 하나의 군으로 하는 군수열을 만들면 $(11_{(2)}), (101_{(2)}, 110_{(2)}), (1001_{(2)}, 1010_{(2)}, 1100_{(2)}), \dots$
 따라서, 제 1군은 1개, 제 2군은 2개, 제 3군은 3개이므로 $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \leq 56$

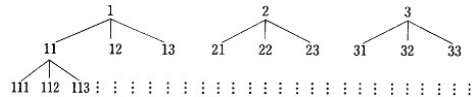
따라서, $n = 10$ 일 때 $\frac{10 \times 11}{2} = 55$ 이므로 제 56항은 제 11군의 첫째항으로 12자리의 수의 첫째 수이다.

(왜냐하면 제 1군은 2자리의 수, 제 2군은 3자리수, ..., 제 11군은 12자리수)

$\therefore 100 \dots 01 = 1 \times 2^{11} + 1 \times 2^0 = 2^{11} + 1$ 답 ③

[key] 자릿수 기준으로 묶기(군수열), 각 군의 항수의 규칙성 발견

문제 26. 다음 그림에 나타나는 수를 크기 순으로 나열하여 다음과 같은 수열을 만들었다.



1, 2, 3, 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33,

111, 112, 113, 121, ... 이 수열의 제 200항은? [94-2차 수능]

- ① 13323 ② 13332 ③ 21111
 ④ 21113 ⑤ 21122

(풀이) 숫자의 자리수에 따라 묶어서 군수열을 만들어 그 군을 S_n 군이라 하면 즉, $S_1 = (1, 2, 3)$, $S_2 = (11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33)$, ...

이 때, 제 n 군의 항수는 $3, 9, 27, \dots$ 이므로 제 4군까지의 항의 개수는 $3 + 9 + 27 + 81 = 120$ (개)이므로 원래 수열의 제 200항은 5군의 80번째 수이다.

따라서 제 5군, 즉 5자리의 수 중 첫째 자리의 숫자가 1인 것이 $3^4 = 81$ (개)이고, 81번째 항은 13333이므로 80번째 항은 13332이다.

따라서 제 200항은 13332이다. 답 ②

[key] 자릿수 기준으로 묶기(군수열), 각 군의 항수의 규칙성 발견

문제 27. 좌표평면 위에 다음 [단계]와 같은 순서로 점을 찍는다.

[단계 1] $(0, 1)$ 에 점을 찍는다.

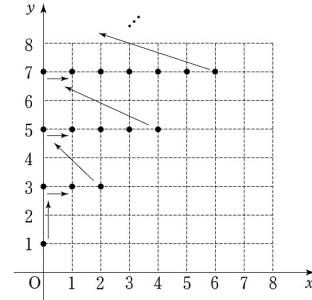
[단계 2] $(0, 3), (1, 3), (2, 3)$ 에 이 순서대로 3개의 점을 찍는다.

$\vdots$

[단계 k] $(0, 2k-1), (1, 2k-1), (2, 2k-1), \dots, (2k-2, 2k-1)$ 에 이 순서대로 $(2k-1)$ 개의 점을 찍는다. (단, k 는 자연수이다.)

$\vdots$

이와 같은 과정으로 [단계 1]부터 시작하여 점을 찍어 나갈 때, 100번째 찍히는 점의 좌표는 (p, q) 이다. $p+q$ 의 값은? [08 수능, 4점]



- ① 34 ② 37 ③ 40 ④ 43 ⑤ 46

(풀이) [단계 k]에 찍히는 점의 개수는 $(2k-1)$ 개이므로 [단계 n]까지 찍힌 모든 점의 개수는 $\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$
 $n^2 = 100$ 에서 $n = 10$ 이다.

즉, [단계 1]부터 [단계 10]까지의 점들의 개수가 100개이므로 100번째 찍힌 점은 [단계 10]의 마지막 점이다. 그런데 [단계 10]의 점의 개수는 $2 \times 10 - 1 = 19$

따라서, 100번째 찍히는 점은 [단계 10]에서 19번째로 찍히는 점이다.

$\therefore (p, q) = (18, 19) \therefore p + q = 37$ 답 ②

[key] 규칙성 찾기, 부분합의 공식

6 규칙성 찾기

문제 28. 수열 $\{a_n\}$ 은 처음 6개 항

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ 이 서로 다르고 $a_{n+6} = a_n$

($n = 1, 2, 3, \dots$)을 만족시킨다.

다음과 같이 정의된 수열 $\{b_n\}$ 중 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ 의 값이 모두 나타나는 것은? [98 수능 3점]

① $b_n = a_{2n+1}$ ② $b_n = a_{3n+1}$

③ $b_n = a_{4n+1}$ ④ $b_n = a_{5n+1}$

⑤ $b_n = a_{6n+1}$

(풀이) 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_{n+6} = a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)에서 주기가 6인 수열을 이룬다.

① $b_n = a_{2n+1}$

$\{b_n\} : a_3, a_5, a_7, a_9, a_{11}, a_{13}, \dots$
 $= a_3, a_5, a_1, a_3, a_5, a_1, \dots$

② $b_n = a_{3n+1}$

$\{b_n\} : a_4, a_7, a_{10}, a_{13}, a_{16}, a_{19}, \dots$
 $= a_4, a_1, a_4, a_1, a_4, a_1, \dots$

③ $b_n = a_{4n+1}$

$\{b_n\} : a_5, a_9, a_{13}, a_{17}, a_{21}, a_{25}, \dots$
 $= a_5, a_3, a_1, a_5, a_3, a_1, \dots$

④ $b_n = a_{5n+1}$

$\{b_n\} : a_6, a_{11}, a_{16}, a_{21}, a_{26}, a_{31}, \dots$
 $= a_6, a_5, a_4, a_3, a_2, a_1, \dots$

⑤ $b_n = a_{6n+1}$

$\{b_n\} : a_7, a_{13}, a_{19}, a_{25}, a_{31}, a_{37}, \dots$
 $= a_1, a_1, a_1, a_1, a_1, a_1, \dots$

수열 $\{b_n\}$ 중 n 의 값이 모두 나타나는 것은 ④이다.

[참고] a_{5n+1} 에서 n 의 계수 5는 6과 서로소이다. 답 ④

[key] 주기성

문제 29. $p \geq 2$ 인 자연수 p 에 대하여 수열 a_n 이 다음 세 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1 = 0$

(나) $a_{k+1} = a_k + 1$ ($1 \leq k \leq p-1$)

(다) $a_{k+p} = a_k$ ($k = 1, 2, 3, \dots$)

〈보기〉에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [06 수능, 4점]

〈보기〉

ㄱ. $a_{2k} = 2a_k$

ㄴ. $a_1 + a_2 + \dots + a_p = \frac{p(p-1)}{2}$

ㄷ. $a_p + a_{2p} + \dots + a_{kp} = k(p-1)$

① ㄱ

② ㄴ

③ ㄷ

④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

(풀이) (나) 의미? 만약 $k \geq 1$ 이라고만 나왔다면 $\{a_k\}$ 은 공차가 1인 등차수열

그런데 $1 \leq k \leq p-1$ 이므로 $\{a_k\}$ 은 k 의 일부 구간에서 공차가 1인 등차수열

(다) 의미? $\{a_k\}$ 은 주기가 p 인 등차수열

ㄱ. (반례) $p=2$ 이면 $a_2 = a_1 + 1 = 1 \neq 2a_1 = 0$ (거짓)

ㄴ. (가), (나)에서 $a_1 = 0$, $a_2 = a_1 + 1 = 1$, $a_3 = a_2 + 1 = 2$, $\dots$,
 $a_p = a_{p-1} + 1 = p-1$

$\therefore a_1 + a_2 + \dots + a_p = 0 + 1 + 2 + \dots + (p-1) = \frac{p(p-1)}{2}$ (참)

ㄷ. (다)에 $k=p$ 를 대입하면 $a_{p+p} = a_{2p} = a_p = p-1$, $a_{2p+p} = a_{3p} = a_{2p} = a_p = p-1$, $\dots$, $a_{kp} = a_p = p-1$

$\therefore a_p + a_{2p} + \dots + a_{kp} = k(p-1)$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

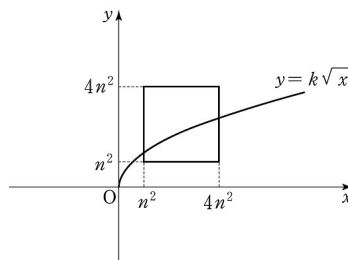
[참고] $p=5$ 일 때 수열 a_n 은 다음과 같다. $\rightarrow p$: 주기

0, 1, 2, 3, 4, 0, 1, 2, 3, 4, 0, 1, 2, 3, 4, 0, 1, 2, 3, 4, $\dots$ 답 ④

[key] 등차수열의 변형, 주기성

문제 30. 좌표평면에서 자연수 n 에 대하여 A_n 을 4개의 점 $(n^2, n^2), (4n^2, n^2), (4n^2, 4n^2), (n^2, 4n^2)$ 을 꼭지점으로 하는 정사각형이라 하자.

정사각형 A_n 과 함수 $y = k\sqrt{x}$ 의 그래프가 만나도록 하는 자연수 k 의 개수를 a_n 이라 할 때, 〈보기〉에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [07 수능, 4점]



〈보기〉

ㄱ. $a_5 = 15$

ㄴ. $a_{n+2} - a_n = 7$

ㄷ. $\sum_{k=1}^{10} a_k = 200$

① ㄴ

② ㄷ

③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

(풀이) $y = k\sqrt{x}$ 가 $(4n^2, n^2)$ 을 지나면 $n^2 = k \cdot \sqrt{4n^2}$ 에서 $k = \frac{1}{2}n$
 $y = k\sqrt{x}$ 가 $(n^2, 4n^2)$ 을 지나면 $4n^2 = k \cdot \sqrt{n^2}$ 에서 $k = 4n$

$\therefore y = k\sqrt{x}$ 가 주어진 정사각형과 만날려면 $\frac{1}{2}n \leq k \leq 4n$ 이어야 한다.

ㄱ. $n=5$ 일 때 $\frac{5}{2} \leq k \leq 20$ 이므로 $a_5 = 20 - 2 = 18$

ㄴ. n 이 홀수일 때 $a_n = 4n - \{\frac{1}{2}(n+1) - 1\} = \frac{7}{2}n + \frac{1}{2}$

$\Rightarrow a_{n+2} = 4(n+2) - \{\frac{1}{2}(n+3) - 1\} = \frac{7}{2}n + \frac{15}{2}$

n 이 짝수일 때 $a_n = 4n - \frac{1}{2}n + 1 = \frac{7}{2}n + 1$

$\Rightarrow a_{n+2} = 4(n+2) - \frac{1}{2}(n+2) + 1 = \frac{7}{2}n + 8$

그러므로 $a_{n+2} - a_n = 7$

ㄷ. $\sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=1}^5 a_{2k-1} + \sum_{k=1}^5 a_{2k}$

$= \sum_{k=1}^5 \{\frac{7}{2}(2k-1) + \frac{1}{2}\} + \sum_{k=1}^5 \{\frac{7}{2}(2k) + 1\} = 200$ 답 ④

[key] 그래프가 정사각형과 만나기 위한 결정적 두 점

8 제 2 장 수열

$(4n^2, n^2), (n^2, 4n^2)$ 을 찾기, 보기 ㄴ에서 n 이 홀수일 때와 짝수일 때로 구분하기

문제 31. 수열 a_n 이 $\sqrt{17} - 4 = \frac{1}{8+a_1} = \frac{1}{8+\frac{1}{8+a_2}} = \frac{1}{8+\frac{1}{8+\frac{1}{8+a_3}}} = \dots$ 을 만족시킬 때, a_{2002} 의 값은? [02 수능 3점]

- ① $\sqrt{17} - 4$ ② $3 - \sqrt{17}$ ③ $5 - \sqrt{17}$
 ④ $\sqrt{17}$ ⑤ $\sqrt{17} + 4$

(풀이) 주어진 식을 살펴 보면 $a_n = \frac{1}{8+a_{n+1}}$ 에서 $a_{n+1} = \frac{1}{a_n} - 8$ 인 관계가 성립한다.

그런데 $a_1 = \frac{1}{\sqrt{17}-4} - 8 = \frac{\sqrt{17}+4}{(\sqrt{17}-4)(\sqrt{17}+4)} - 8 = \sqrt{17} - 4$ 이므로

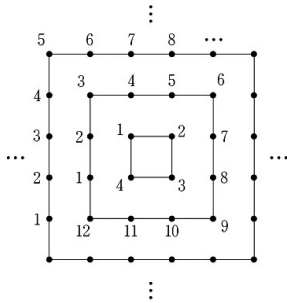
$$a_2 = \frac{1}{\sqrt{17}-4} - 8 = \sqrt{17} - 4, \dots$$

$$a_{2002} = \sqrt{17} - 4 \quad \text{답 ①}$$

[key] 규칙성 찾기

[참고] 2002와 같이 대책 없이 큰 수가 나왔다는 뜻은 문제가 규칙성을 갖고 있어 규칙성에 의해 답을 구하기 쉬울 수 있다는 것입니다. 명심하세요.

문제 32. 한 변의 길이가 각각 $1, 3, 5, \dots, 2n-1, \dots$ 인 정사각형의 변과 꼭지점에 아래 그림과 같이 일정한 간격으로 자연수가 규칙적으로 배열되어 있다.



이 때, 각 정사각형에서 1은 왼쪽 아래 꼭지점 바로 위에 놓여 있다. 각 정사각형의 네 꼭지점에 놓이는 자연수를 성분으로 하는 이차정사각행렬을 차례로 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$ 이라 하자.

예를 들면, $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}$ 이다.

행렬 A_{15} 의 모든 성분의 합을 구하시오. [05 수능 4점]

(풀이) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 20 & 15 \end{pmatrix}$,
 $\dots$

행렬 A_n 의 모든 성분의 합을 S_n 이라 하면

$$S_1 = 10, S_2 = 30, S_3 = 50, \dots, S_n = 20n - 10$$

따라서, A_{15} 의 모든 성분의 합은 $S_{15} = 20 \times 15 - 10 = 290$

[별해] $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 12 & 9 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = 3A_1$, $A_3 = 5A_1$, $\dots$, $A_n = (2n-1)A_1$

$$\therefore A_{15} = 29A_1$$

따라서, A_{15} 의 모든 성분의 합은 $29(1+2+3+4) = 290$ 이다. 답 290

[key] 규칙성 찾기

문제 33. 아래 그림과 같이 자연수 n 에 대하여 n 개의 항 $\left[\frac{n}{1}\right], \left[\frac{n}{2}\right], \left[\frac{n}{3}\right], \dots, \left[\frac{n}{n}\right]$ 이 n 행에 1열부터 n 열까지 차례로 나열되어 있다. (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수)

	1열	2열	3열	4열	5열	...	n 열	...
1행	1							
2행	2	1						
3행	3	1	1					
4행	4	2	1	1				
5행	5	2	1	1	1			
...								
n 행	$\left[\frac{n}{1}\right]$	$\left[\frac{n}{2}\right]$	$\left[\frac{n}{3}\right]$			...		$\left[\frac{n}{n}\right]$
...								

<보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [05 수능 4점]

<보기>

ㄱ. n 행에서 그 값이 1인 항은 $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ 개이다.

ㄴ. 100행에서 그 값이 3인 항은 8개이다.

ㄷ. 3열에서 그 값이 5인 항은 5개이다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ

- ④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

(풀이) ㄱ. (참) $\left[\frac{n}{k}\right] = 1 (1 \leq k \leq n)$ 이 되는 경우

$$\left[\frac{n}{k}\right] = 1 \Rightarrow 1 \leq \frac{n}{k} < 2 \Rightarrow \frac{n}{2} < k \leq n$$

(i) n 이 홀수일 때 $\frac{n+1}{2} \leq k \leq n$ 이므로 자연수 k 의 개수는 $n - (\frac{n+1}{2}) + 1 = \frac{n+1}{2}$ (개)

(ii) n 이 짝수일 때 $\frac{n}{2} + 1 \leq k \leq n$ 이므로 자연수 k 의 개수는 $n - (\frac{n}{2} + 1) + 1 = \frac{n}{2}$ (개)

따라서, n 행에서 그 값이 1인 항은 $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ 개이다.

$$\therefore \text{ (참) } \left[\frac{100}{k}\right] = 3 \text{ 에서 } 3 \leq \frac{100}{k} < 4$$

$$\frac{1}{4} < \frac{k}{100} \leq \frac{1}{3}, \frac{100}{4} < k \leq \frac{100}{3} \therefore 25 < k \leq 33. \times \times \times$$

따라서, 자연수 k 의 개수는 $33 - 25 = 8$ (개)이다.

$$\therefore \text{ (거짓) } \left[\frac{m}{3}\right] = 5 \text{ 에서 } 5 \leq \frac{m}{3} < 6 \Rightarrow 15 \leq m < 18$$

따라서, 3열에서 그 값이 5인 항은 15, 16, 17로 3(개)이다.

따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ④

[key] 규칙성 찾기

문제 34. 방정식 $x^3 = 1$ 의 한 허근을 ω 라고 할 때, 자연수 n 에 대하여 함수 $f(n)$ 을 다음과 같이 정의한다.

$$f(n) = \frac{\omega^{2n}}{\omega^n + 1}$$

이 때, $\sum_{n=1}^{20} f(n)$ 의 값을 구하시오. [03 수능 3점]

(풀이) $x^3 = 1 \Rightarrow (x-1)(x^2+x+1) = 0$
 $\therefore \omega^2 + \omega + 1 = 0, \omega^3 = 1$
 $\Rightarrow \omega = -\omega^2 - 1, \omega^2 = -\omega - 1, \omega^3 = 1,$
 $\Rightarrow \omega^4 = \omega = -\omega^2 - 1, \omega^5 = \omega^2 = -\omega - 1, \omega^6 = 1,$
 $\Rightarrow \omega^7 = -\omega^2 - 1, \omega^8 = -\omega - 1, \omega^9 = 1,$

$\therefore \leftarrow$ 주기성

한편, $f(n) = \frac{\omega^{2n}}{\omega^{n+1}}$ 에서

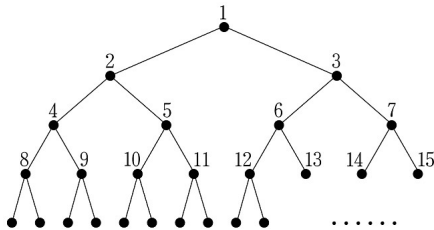
(i) $n = 3k$ 이면 $f(n) = \frac{\omega^{2(3k)}}{\omega^{3k+1}} = \frac{1}{2}$

(ii) $n = 3k+1$ 이면 $f(n) = \frac{\omega^{2(3k+1)}}{\omega^{3k+1}} = \frac{\omega^{6k+2}}{1 \cdot \omega+1}$
 $= \frac{(\omega^{3k})^2 \cdot \omega^2}{\omega+1} = \frac{\omega^2}{\omega+1} = -1$

(iii) $n = 3k+2$ 이면 $f(n) = \frac{\omega^{2(3k+2)}}{\omega^{3k+1}} = \frac{\omega^{6k+4}}{\omega^{3k+1}} = \frac{\omega^{3(2k+1)} \cdot \omega}{\omega^{3k+1}} = \frac{\omega}{\omega^2+1} = -1$
따라서, $f(1)+f(2)+\dots+f(20) = \{(-1)+(-1)+\frac{1}{2}\} \times 6 + (-1)+(-1)$
 $= -\frac{3}{2} \times 6 + (-2) = -11$ 답 -11

[key] 정수의 분류 (나머지 개념), 규칙성 찾기

문제 35. 아래 그림과 같이 각각의 점에 1부터 연속된 자연수를 규칙적으로 대응시키고 이 점들을 선분으로 연결한다.



서로 다른 두 자연수 a 와 b 에 대응되는 두 점을 연결하는 선분들의 최소 개수를 $N(a, b)$ 라 하자.

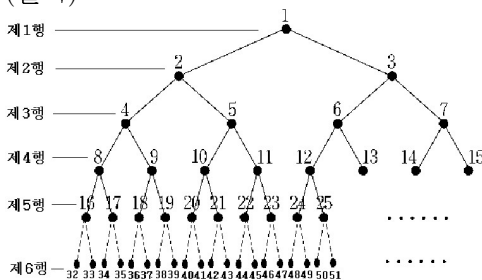
예를 들면, $N(4, 6) = 4$ 이고 $N(12, 27) = 3$ 이다.

$N(32, 33) + N(32, 34) + N(32, 35) + \dots + N(32, 63)$

의 값은? [’04 수능 3점]

- ① 196 ② 258 ③ 270
 ④ 312 ⑤ 344

(풀이)



32는 제 6 행의 첫째항이다. 33은 제 5 행의 16에 바로 연결되므로 $N(32, 33) = 2$

34와 35는 제 4 행의 8과 제 5 행의 17에 연결되므로 $N(32, 34) + N(32, 35) = 4 + 4 = 4 \times 2 = 8$

36 ~ 39는 제 3 행의 4와 제 4 행의 9에 연결되므로 $N(32, 36) + N(32, 37) + N(32, 38) + N(32, 39) = 6 + 6 + 6 + 6 = 6 \times 4 = 24$

40 ~ 47은 제 2 행의 2에 연결되므로 $N(32, 40) + N(32, 41) + \dots + N(32, 47) = 8 \times 8 = 64$

마지막 48 ~ 63은 제 1 행의 1에 연결되므로 $N(32, 48) + N(32, 49) + \dots + N(32, 63) = 10 \times 16 = 160$

이상에서 구하는 값은 $2 + 8 + 24 + 64 + 160 = 258$ 답 ②

[key] 규칙성 찾기, 도전과 인쇄

문제 36. 한 평면에 서로 다른 n 개의 직선을 그려서 나누어진 영역의 수의 최소값을 $f(n)$, 최대값을 $g(n)$ 이라 하자. <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은? [’02 수능 3점]

<보기>

ㄱ. $f(2) = 3, g(2) = 4$ 이다.

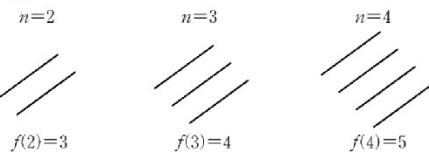
ㄴ. 모든 n 에 대하여 $f(n) = n + 1$ 이다.

ㄷ. 모든 n 에 대하여 $g(n) \leq f(n+1)$ 이다.

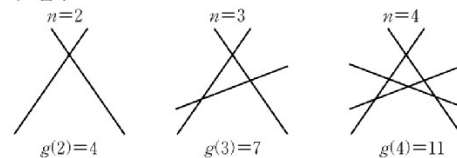
- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

(풀이) 나누어진 영역의 수가 최소가 되려면 모든 직선들이 서로 평행해야 한다. 다음 [그림 1]로부터 나누어진 영역의 수의 최소값 $f(n)$ 을 구하면 $\therefore f(n) = n + 1$

<그림 1>



<그림 2>



반대로 나누어진 영역의 수가 최대가 되려면 임의의 두 직선은 반드시 한 점에서 만나야 하고 어떤 세 직선도 한 점에서 만나지 말아야 한다.

다음 [그림 2]로부터 나누어진 영역의 수의 최대값 $g(n)$ 의 일부를 구해 보면 위 결과로부터 <보기> ㄱ, ㄴ은 옳지만 <보기> ㄷ은 옳지 않음을 쉽게 알 수 있다.

[별해] 나누어진 영역의 수가 최대가 되려면 임의의 두 직선은 반드시 한 점에서 만나야 하고 어떤 세 직선도 한 점에서 만나지 말아야 한다.

현재 n 개의 직선이 있는 상태에서 한 직선을 위와 같이 n 개의 모든 직선과 만나게 그리면, 새로 생기는 영역의 수는 $n+1$ 이므로 최대인 경우는 점화식이 $g(n+1) = g(n) + n + 1$ 로 나타난다.

$$g(2) = g(1) + 2$$

$$g(3) = g(2) + 3$$

$\vdots$

$$g(n) = g(n-1) + n$$

양변을 각각 더하면 $g(n) = g(1) + (2+3+\dots+n) = 2 + (2+3+\dots+n)$

$$\therefore g(n) = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\langle \text{보기} \rangle \quad \text{ㄷ에서 } g(n) \leq f(n+1) \Rightarrow 1 + \frac{n(n+1)}{2} \leq n+2$$

$$\Rightarrow 2 + n(n+1) \leq 2n+4 \Rightarrow n^2 - n - 2 \leq 0 \Rightarrow -1 \leq n \leq 2 \Rightarrow 1 \leq n \leq 2$$

답 ③

[key] 규칙성 찾기

문제 37. 다음은 제품 P_n 을 만드는 방법과 소요시간에 대한 설명이다. (단, $n = 2^k$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$)

- (가) 제품 P_1 을 한 개 만드는 데 걸리는 시간은 1이다.
 (나) 제품 P_1 을 차례대로 두 개 만든 다음에 이를 연결하면 제품 P_2 가 만들어진다.
 (다) 제품 P_n 을 차례대로 두 개 만든 다음에 이를 연결하면 제품 P_{2n} 이 한 개 만들어진다. 이 때, 제품 P_n 을 연결하는 데 걸리는 시간은 $2n$ 이다.

이 때, 제품 P_{16} 을 한 개 만드는 데 걸리는 시간은?
 [96수능]

- ① 32 ② 64 ③ 80 ④ 96 ⑤ 112
 (풀이) P_{16} 을 한 개 만들기 위해서는 P_8 2개를 만들어야 한다.
 P_8 한 개를 만들기 위해서는 P_4 2개를 만들어야 한다.
 $\therefore P_{16}$ 을 한 개 만들기 위해서는 P_4 를 4 = 2^2 개를 만들어야 한다.
 P_4 한 개를 만들기 위해서는 P_2 2개를 만들어야 한다.
 $\therefore P_{16}$ 을 한 개 만들기 위해서는 P_2 를 8 = 2^3 개를 만들어야 한다.
 P_2 한 개를 만들기 위해서는 P_1 2개를 만들어야 한다.
 $\therefore P_{16}$ 을 한 개 만들기 위해서는 P_1 를 16 = 2^4 개를 만들어야 한다.

걸리는 시간을 계산하여 보자.

- (1) P_1 를 한 개 만드는 데 걸리는 시간이 1이므로 16이 걸린다.
 (2) P_2 를 한 개 만들기 위해서는 P_1 과 P_1 을 연결하면 되는데 이 때, 걸리는 시간이 $2 \times 1 = 2$
 그런데 P_2 를 8개 만들어야 하므로 $8 \times 2 = 16$ 이 걸린다.
 (3) P_4 를 한 개 만들기 위해서는 P_2 과 P_2 를 연결하면 되는데 이 때, 걸리는 시간은 $2 \times 2 = 4$
 그런데 P_4 를 4개 만들어야 하므로 $4 \times 4 = 16$ 이 걸린다.
 (4) P_8 을 한 개 만들기 위해서는 P_4 과 P_4 를 연결하면 되는데 이 때, 걸리는 시간은 $2 \times 4 = 8$
 그런데 P_8 을 2개 만들어야 하므로 $2 \times 8 = 16$ 이 걸린다.
 (5) P_{16} 을 한 개 만들기 위해서는 P_8 과 P_8 을 연결하면 되는데 이 때, 걸리는 시간은 $2 \times 8 = 16$

따라서 $16 \times 5 = 80$

7 수학적귀납법

문제 38. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여 $(1^2 + 1) \cdot 1! + (2^2 + 1) \cdot 2! + \dots + (n^2 + 1) \cdot n! = n \cdot (n+1)!$ 이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

- (1) $n = 1$ 일 때, (좌변) = 2, (우변) = 2 이므로 주어진 등식은 성립한다.

(2) $n = k$ 일 때 성립한다고 가정하면 $(1^2 + 1) \cdot 1! + (2^2 + 1) \cdot 2! + \dots + (k^2 + 1) \cdot k! = k \cdot (k+1)!$ 이다.

$n = k+1$ 일 때 성립함을 보이자.

$$(1^2 + 1) \cdot 1! + (2^2 + 1) \cdot 2! + \dots + (k^2 + 1) \cdot k! + \{(k+1)^2 + 1\} \cdot (k+1)! = \boxed{\text{가}} + \{(k+1)^2 + 1\} \cdot (k+1)! \\ = \boxed{\text{나}} \cdot (k+1)! = (k+1) \cdot \boxed{\text{다}}$$

그러므로 $n = k+1$ 일 때도 성립한다.

따라서 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 등식은 성립한다.

위 증명에서 (가), (나), (다) 에 들어갈 식으로 알맞은 것은? [08수능 3점]

(가)	(나)	(다)
① $k \cdot (k+1)!$	$k^2 + 2k + 1$	$(k+1)!$
② $k \cdot (k+1)!$	$k^2 + 3k + 2$	$(k+2)!$
③ $k \cdot (k+1)!$	$k^2 + 3k + 2$	$(k+1)!$
④ $(k+1) \cdot (k+1)!$	$k^2 + 3k + 2$	$(k+2)!$
⑤ $(k+1) \cdot (k+1)!$	$k^2 + 2k + 1$	$(k+1)!$

(풀이) $\boxed{k(k+1)!} + \{(k+1)^2 + 1\} \cdot (k+1)! = \{k + (k+1)^2 + 1\} \cdot (k+1)! = \boxed{(k^2 + 3k + 2)} \cdot (k+1)! = (k+1)(k+2)(k+1)! = (k+1) \cdot \boxed{(k+2)!}$ 답 ②

[참고] 수열에서의 점화식과 증명에서의 수학적귀납법은 동일 개념입니다.

[key] 수학적귀납법의 3단계 절차, $n \times (n-1)! = n!$

문제 39. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여 $\sum_{k=1}^n (5k - 3)(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{n}) = \frac{n(5n+3)}{4}$ 이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

(1) $n = 1$ 일 때, (좌변) = 2, (우변) = 2 이므로 주어진 등식은 성립한다.

(2) $n = m$ 일 때 성립한다고 가정하면 $\sum_{k=1}^m (5k - 3)(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{m}) = \frac{m(5m+3)}{4}$ 이다.

$n = m+1$ 일 때 성립함을 보이자.

$$\sum_{k=1}^{m+1} (5k - 3)(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \dots + \frac{1}{m+1}) = \sum_{k=1}^m (5k - 3)(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \dots + \frac{1}{m+1}) + \boxed{\text{가}}$$

$$3)(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \dots + \frac{1}{m+1}) + \boxed{\text{가}} = \sum_{k=1}^m (5k - 3)(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \dots + \frac{1}{m+1}) + \boxed{\text{가}}$$

$$\frac{1}{k+1} + \cdots + \frac{1}{(나)} + \frac{1}{m+1} \sum_{k=1}^m (5k-3) + \frac{(가)}{m+1}$$

$$= \frac{m(5m+3)}{4} + \frac{1}{m+1} \sum_{k=1}^{m+1} \frac{(다)}{4} = \frac{(m+1)(5m+8)}{4}$$

그러므로 $n = m+1$ 일 때도 성립한다. 따라서 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 등식은 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [06 수능, 4점]

(가)	(나)	(다)
① $5m-3$	m	$5k+2$
② $5m-3$	$m+1$	$5k+2$
③ $5m+2$	m	$5k-3$
④ $5m+2$	m	$5k+2$
⑤ $5m+2$	$m+1$	$5k-3$

(풀이) $\sum_{k=1}^{m+1} (5k-3) \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \cdots + \frac{1}{m+1} \right) = \sum_{k=1}^m (5k-3) \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \cdots + \frac{1}{m+1} \right) + \{5(m+1)-3\} \frac{1}{m+1} = \sum_{k=1}^m (5k-3) \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \cdots + \frac{1}{m+1} \right) + \frac{5m+2}{m+1} = \sum_{k=1}^m (5k-3) \left\{ \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \cdots + \frac{1}{m} \right) + \frac{1}{m+1} \right\} + \frac{5m+2}{m+1} = \sum_{k=1}^m (5k-3) \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \cdots + \frac{1}{m} \right) + \sum_{k=1}^m (5k-3) \frac{1}{m+1} + \frac{5m+2}{m+1} = \sum_{k=1}^m (5k-3) \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \cdots + \frac{1}{m} \right) + \frac{1}{m+1} \sum_{k=1}^m (5k-3) + \frac{5m+2}{m+1}$

$$= \frac{m(5m+3)}{4} + \frac{1}{m+1} \sum_{k=1}^{m+1} (5k-3) = \frac{(m+1)(5m+8)}{4}$$

따라서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은 차례로 $5m+2, m, 5k-3$ 이다. 답 ③

[key] 문제에서 주어진 $\sum$ 식의 이해

문제 40. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여 부등식 $\sum_{i=1}^{2n+1} \frac{1}{n+i} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n+1} > 1$ 이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

자연수 n 에 대하여 $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n+1}$ 이라 할 때, $a_n > 1$ 임을 보이면 된다.

(1) $n=1$ 일 때 $a_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1$ 이다.

(2) $n=k$ 일 때 $a_k > 1$ 이라고 가정하면 $n=k+1$ 일 때 $a_{k+1} = \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{3k+4} = a_k + \left(\frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4} \right) - \frac{(가)}{3k+1}$

한편, $(3k+2)(3k+4) \frac{(나)}{(다)} (3k+3)^2$ 이므로 $\frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+4} > \frac{(다)}{(나)}$

그런데 $a_k > 1$ 이므로 $a_{k+1} > a_k + \left(\frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4} \right) - \frac{(가)}{3k+1} > 1$

그러므로 (1), (2)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n > 1$ 이다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [05 수능 3점]

(가)	(나)	(다)
① $\frac{1}{k+1}$	$>$	$\frac{2}{3k+3}$
② $\frac{1}{k+1}$	$<$	$\frac{2}{3k+3}$
③ $\frac{1}{k+1}$	$<$	$\frac{4}{3k+3}$
④ $\frac{2}{k+1}$	$>$	$\frac{4}{3k+3}$
⑤ $\frac{2}{k+1}$	$<$	$\frac{1}{k+1}$

(풀이) $n=k$ 일 때, $a_k > 1$ 이라고 가정하면

$$a_k = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{3k+1} > 1$$

$$n=k+1 \text{ 일 때 } a_{k+1} = \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{3k+4}$$

$$= \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{3k+1} \right) + \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4} - \frac{1}{k+1}$$

$$= a_k + \left(\frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4} \right) - \frac{1}{k+1}$$

한편, $(3k+2)(3k+4) = 9k^2 + 18k + 8$

$$(3k+3)^2 = 9k^2 + 18k + 9 \text{ 이므로 } (3k+2)(3k+4) < (3k+3)^2 \text{ 이고}$$

$$\frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+4} = \frac{6k+6}{(3k+2)(3k+4)} > \frac{6k+6}{(3k+3)^2} = \frac{2}{3k+3}$$

그러면 $a_k > 1$ 이므로 $a_{k+1} > a_k + \left(\frac{1}{3k+3} + \frac{2}{3k+3} \right) - \frac{1}{k+1} = a_k > 1$

따라서, 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n > 1$ 이다. 답 ②

[key] 문제에서 주어진 $\sum$ 식의 이해

[참고] $a_{k+1} - a_k = \left(\frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4} \right) - \frac{1}{k+1} > \frac{2}{3k+3} + \frac{1}{3k+3} - \frac{1}{k+1} = 0$

$$\Rightarrow a_{k+1} - a_k > 0 \Rightarrow a_{k+1} > a_k > 1$$

[답안 찾기] (나)와 (다)는 증명 전체가 아니라 (나)와 (다)의 좌우변만 비교하면 금방 찾을 수 있어요. 그렇게 찾으면 (가)와는 무관하게 (나)와 (다)에 의해 정답을 찾을 수 있습니다.

문제 41. 수열 $\{a_n\}$ 이

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ (n+1)(n+2)a_{n+1} = n^2 a_n \end{cases}$$

($n=1, 2, 3, \dots$)일 때, 다음은 모든 자연수 n 에 대하여 $\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} - \frac{n}{n+1} \dots (*)$ 이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

(1) $n=1$ 일 때, (좌변) $= \frac{1}{2}$, (우변) $= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ 이므로 (*)이 성립한다.

(2) $n=m$ 일 때, (*)이 성립한다고 가정하면 $\sum_{k=1}^m a_k = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} - \frac{m}{m+1}$ 이다.

$n = m + 1$ 일 때, (*) 이 성립함을 보이자.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m+1} a_k &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} - \frac{m}{m+1} + a_{m+1} \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} - \frac{m}{m+1} + \boxed{\text{(가)}} a_m \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} - \frac{m}{m+1} \\ &\quad + \frac{m^2}{(m+1)(m+2)} \cdot \frac{(m-1)^2}{m(m+1)} \cdots \frac{1^2}{2 \cdot 3} a_1 \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} - \frac{m}{m+1} + \boxed{\text{(나)}} \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} - \frac{m}{m+1} + \frac{1}{(m+1)^2} - \boxed{\text{(다)}} \\ &= \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k^2} - \frac{m+1}{m+2} \end{aligned}$$

그러므로 $n = m + 1$ 일 때도 (*) 이 성립한다.

따라서 모든 자연수 n 에 대하여 (*) 이 성립한다.

위 증명에서 (가), (나), (다) 에 들어갈 식으로 알맞은 것은? [수능 09, 3 점]

- | | (가) | (나) | (다) |
|---|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| ① | $\frac{m}{(m+1)(m+2)}$ | $\frac{1}{(m+1)^2(m+2)}$ | $\frac{1}{(m+1)(m+2)^2}$ |
| ② | $\frac{m}{(m+1)(m+2)}$ | $\frac{m}{(m+1)^2(m+2)}$ | $\frac{1}{(m+1)(m+2)}$ |
| ③ | $\frac{m^2}{(m+1)(m+2)}$ | $\frac{1}{(m+1)^2(m+2)}$ | $\frac{1}{(m+1)(m+2)^2}$ |
| ④ | $\frac{m^2}{(m+1)(m+2)}$ | $\frac{1}{(m+1)^2(m+2)}$ | $\frac{1}{(m+1)(m+2)}$ |
| ⑤ | $\frac{m^2}{(m+1)(m+2)}$ | $\frac{m}{(m+1)^2(m+2)}$ | $\frac{1}{(m+1)(m+2)^2}$ |

(풀이) (1) $n = 1$ 일 때, (좌변) = $\frac{1}{2}$, (우변) = $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ 이므로 (*) 이 성립한다.

(2) $n = m$ 일 때, (*) 이 성립한다고 가정하면 $\sum_{k=1}^m a_k = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} - \frac{m}{m+1}$ 이다.

$n = m + 1$ 일 때, (*) 이 성립함을 보이자.

수열 $\{a_n\}$ 의 정의에 의해 $a_{m+1} = \frac{m^2}{(m+1)(m+2)} a_m$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m+1} a_k &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} - \frac{m}{m+1} + a_{m+1} \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} - \frac{m}{m+1} + \frac{m^2}{(m+1)(m+2)} a_m \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} - \frac{m}{m+1} + \frac{m^2}{(m+1)(m+2)} \cdot \frac{(m-1)^2}{m(m+1)} \cdots \frac{1^2}{2 \cdot 3} a_1 \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} - \frac{m}{m+1} + \frac{m^2}{(m+1)(m+2)} \cdot \frac{(m-1)^2}{m(m+1)} \cdots \frac{1^2}{2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} - \frac{m}{m+1} + \frac{1}{(m+1)^2(m+2)} \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} - \frac{m}{m+1} + \frac{1}{(m+1)^2} - \frac{1}{(m+1)(m+2)} \\ &= \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k^2} - \left\{ \frac{m}{m+1} + \frac{1}{(m+1)(m+2)} \right\} \\ &= \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k^2} - \frac{(m+1)^2}{(m+1)(m+2)} \\ &= \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k^2} - \frac{m+1}{m+2} \end{aligned}$$

그러므로 $n = m + 1$ 일 때에도 (*) 이 성립한다.

따라서 모든 자연수 n 에 대하여 (*) 이 성립한다. [정답] ④

[key] $a_{m+1} = f(m)a_m$ 점화식, 연쇄소거법(대각선 소거법), 이항분리

$$\frac{1}{ABC} = \frac{1}{C-A} \left(\frac{1}{AB} - \frac{1}{BC} \right)$$

8 점화식

문제 42. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 = 2$ 이고 $a_{n+1} = 2a_n + 2$ 일 때, a_{10} 의 값은? [07 수능, 3 점]

- ① 1022 ② 1024 ③ 2021
④ 2046 ⑤ 2082

(풀이) $a_{n+1} = 2a_n + 2$

$$\alpha = 2\alpha + 2 \cdots \cdots \textcircled{a}$$

좌변은 좌변끼리, 우변은 우변끼리 빼면

$$a_{n+1} - \alpha = 2(a_n - \alpha)$$

그런데 ③에서 $\alpha = -2$

$$a_{n+1} + 2 = 2(a_n + 2)$$

$$\therefore a_n + 2 = (a_1 + 2)2^{n-1} = 4 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1}$$

$$\therefore a_{10} = 2^{11} - 2 = 2048 - 2 = 2046 \text{ 답 } \textcircled{4}$$

[key] 점화식의 대표유형 가운데 하나인 $a_{n+1} = pa_n + q$ (단, $p \neq 1$, $q \neq 0$)에서 상수 q 를 소거하기라는 idea 로 만들어 보기

[별해] $a_{n+1} = 2a_n + 2$

$$a_n = 2a_{n-1} + 2$$

좌변은 좌변끼리, 우변은 우변끼리 빼면

$$a_{n+1} - a_n = 2(a_n - a_{n-1})$$

$\therefore b_n = a_{n+1} - a_n$ 이라 두면 $\{b_n\}$ 은 첫째항 $a_2 - a_1 = 6 - 2 = 4$

이고, 공비가 2 인 a_n 의 계차수열

$$b_n = 4 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1}$$

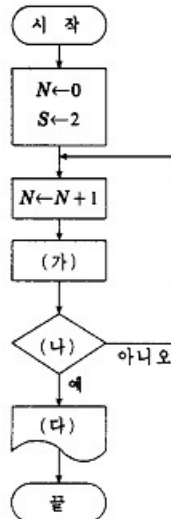
$$\therefore a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 2 + \frac{4(2^{n-1}-1)}{2-1} = 2^{n+1} - 2$$

$$\Rightarrow a_{10} = 2^{11} - 2 = 2046$$

[key] 계차수열을 이용한 일반항 구하기

9 순서도

문제 43. 아래 순서도는 부등식 $2^{n+1} < 9n^4$ 이 성립하지 않는 가장 작은 자연수 n 을 찾기 위해 작성하였다. 아래 순서도에서 (가), (나), (다) 에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은? [97 수능 2 점]



- ① $S \leftarrow S + 2$, $S \geq 9N^4$, $N + 1$ 을 인쇄
② $S \leftarrow S \times 2$, $S < 9N^4$, N 을 인쇄

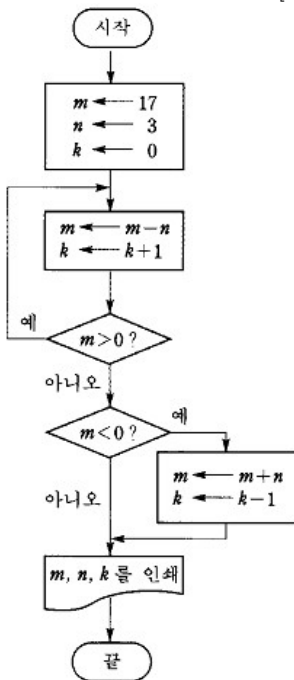
③ $S \leftarrow S \times 2, S < 9N^4, N+1$ 을 인쇄

④ $S \leftarrow S \times 2, S \geq 9N^4, N$ 을 인쇄

⑤ $S \leftarrow S \times 2, S \geq 9N^4, N+1$ 을 인쇄
(풀이)

부등식 $2^{n+1} < 9n^4$ $N=0, S=2, N=1, S=2^2, S=2^3$ 이므로
㉞ $S \leftarrow S \times 2$ 가 되어야 한다. 문제에서 $2^{n+1} < 9n^4$ 이 성립하지 않는 가장 작은 자연수이므로 ㉞ $S \geq 9N^4$ 이 되어야 한다. 이 때, ㉞ N 을 인쇄 라고 하여야 한다. 답 ④

문제 44. 다음 순서도에 의하여 인쇄되는 m, n, k 의 값을 순서대로 적으면? [’95 수능 3 점]



① 0, 2, 5

② 0, 2, 6

③ 0, 5, 3

④ 2, 3, 6

⑤ 2, 3, 5

(풀이) (m, n, k) 를 순서대로 적으면 $(m, n, k) \rightarrow (17, 3, 0) \rightarrow (14, 3, 1) \rightarrow (11, 3, 2) \rightarrow (8, 3, 3) \rightarrow (5, 3, 4) \rightarrow (2, 3, 5) \rightarrow (-1, 3, 6) \rightarrow (2, 3, 5)$ 답 ⑤