

이산수학 요점정리
- 수학능력시험 기출문제를 중심으로 -

soosanghun.tistory.com

현행 고등학교 이산수학 교과서의 목차는 다음과 같습니다.

1장 선택과 배열

경우의 수: 곱의 법칙, 합의 법칙

순열: ${}_nP_r$, $\frac{n!}{p!q!r!\cdots}$

조합: ${}_nC_r$

포함 배제 원리

집합의 분할

여러 가지 배열: 중복조합과 분할

비둘기집 원리

2장 그래프

그래프의 뜻: 그래프, 변, 꼭지점, 차수

완전그래프, 평면그래프

오일러 회로

해밀턴 회로, 해밀턴 경로

수형도: $v - e = 1$

생성수형도

행렬과 그래프: 인접행렬

색칠 문제

3장 알고리즘

수의 규칙성: 2~11의 배수 찾기

이진법으로 나타낸 수

소수의 판정과 최대공약수: 유클리드 알고리즘

등차수열, 등비수열

여러 가지 수열: 점화식

세 항 사이의 관계: 피보나치 수열

4장 의사 결정과 최적화

게임과 의사 결정

선거와 정당성

공평한 분배

계획세우기: 상자채우기

그래프와 최적화

1장 선택과 배열 (5문항 출제. 20%)

기존의 순열/조합과 큰 차이가 없는 내용들입니다. 기출문제를 보겠습니다.

('05) 집합 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 의 서로소인 두 부분집합 A, B 의 순서쌍 (A, B) 의 개수는? [3점]

- ① 729 ② 720 ③ 243 ④ 64 ⑤ 36

☞ 6개의 원소는 집합 $A, B, (A \cup B)^c$ 의 셋 중에 하나에 속해야 하므로 경우의 수는 $3^6 = 729$ (가지)  ①

('09) 여섯 개의 문자 A, B, C, D, E, F 를 모두 사용하여 만든 6자리 문자열 중에서 다음 조건을 모두 만족시키는 문자열의 개수는?

- (가) A 의 바로 다음 자리에 B 가 올 수 없다.
 (나) B 의 바로 다음 자리에 C 가 올 수 없다.
 (다) C 의 바로 다음 자리에 A 가 올 수 없다.

(예를 들어 CDFBAE는 조건을 만족시키지만 CDFABE는 조건을 만족시키지 않는다.)
 [4점]

- ① 380 ② 432 ③ 484 ④ 536 ⑤ 598

☞ 여섯문자로 만들 수 있는 문자열은 모두 $6! = 720$ 가지가 있습니다. 이 중에서 조건에 나와있는 대로 중복이 되는 것을 빼 보도록 하겠습니다. 세 조건이 나와 있으니

집합 X 를 AB 가 붙어 있는 문자열

집합 Y 를 BC 가 붙어 있는 문자열,

집합 Z 를 CA 가 붙어 있는 문자열이라고 하고서 옛날에 배운

$$1) n(X \cup Y \cup Z) = n(X) + n(Y) + n(Z) - n(X \cap Y) - n(Y \cap Z) - n(Z \cap X) + n(X \cap Y \cap Z)$$

$$2) n(X^c \cap Y^c \cap Z^c) = n(U) - n(X \cup Y \cup Z)$$

이 두가지 사실을 사용해 보도록 하겠습니다.

우선, AB 를 포함하는 문자열은, AB 를 묶어서 생각하면 5문자 (AB, C, D, E, F)를 배열하는 것과 같습니다. 따라서, $5! = 120$ 가지가 있습니다. 같은 식으로 BC 가 나오는 문자열과 CA 가 나오는 문자열도 각각 120가지가 있습니다. 즉,
 $n(X) + n(Y) + n(Z) = 120 + 120 + 120 = 360$

그런데, AB 를 포함하는 문자열 중의 일부는 BC 가 포함되기도 할 것입니다. (예를 들어, $ABCFED$ 같은 것). 이런 문자열의 개수는 ABC 를 묶어서 생각하면 4문자 (ABC, D, E, F)를 배열하는 것과 같습니다. 따라서, $4! = 24$ 가지가 있습니다. 같은 식으로 BCA 가 포함되는 문자열과 CAB 가 포함되는 문자열도 각각 24가지가 있습니다. 즉,
 $n(X \cap Y) + n(Y \cap Z) + n(Z \cap X) = 24 + 24 + 24 = 72$

마지막으로, ABC 와 BCA . CAB 를 동시에 포함할 수는 없으니까, $n(X \cap Y \cap Z) = 0$ 이

됩니다.

따라서, $n(X \cup Y \cup Z) = 360 - 72 + 0 = 288$ 이 되니까,
주어진 문제에서 구하는 문자열의 숫자는 $720 - 288 = 432$ 가지가 됩니다.

('06) 네 종류의 사탕 중에서 15 개를 선택하려고 한다. 초콜릿사탕은 4 개 이하,
박하사탕은 3 개 이상, 딸기사탕은 2 개 이상, 버터사탕은 1 개 이상을 선택하는
경우의 수를 구하시오. (단, 각 종류의 사탕은 15 개 이상씩 있다.) [4점]

$\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15 \quad (0 \leq x_1 \leq 4, x_2 \geq 3, x_3 \geq 2, x_4 \geq 1)$
 $\Rightarrow x_1 + x_2' + x_3' + x_4' = 9 \quad (0 \leq x_1 \leq 4, x_2' \geq 0, x_3' \geq 0, x_4' \geq 0)$
따라서, ${}_3H_9 + {}_3H_8 + {}_3H_7 + {}_3H_6 + {}_3H_5 =$
 ${}_{11}C_2 + {}_{10}C_2 + {}_9C_2 + {}_8C_2 + {}_7C_2 = 185$

중복조합과는 달리 '분할' 문제는 순열이나 조합과는 달리 딱 떨어지는 알고리즘이
아직까지는 없습니다. 최선의 방법은 사전식으로 배열하는 방법 뿐이겠지요. 기출문제를
보겠습니다.

('07) 같은 종류의 사탕 9개를 같은 종류의 봉지 5개에 빈 봉지가 없도록 나누어 넣는
방법의 수는? [3점]

- ① 8 ② 7 ③ 6 ④ 5 ⑤ 4

$\Rightarrow$ 9의 5 분할을 모두 나열하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} 9 &= 5 + 1 + 1 + 1 + 1 \\ &= 4 + 2 + 1 + 1 + 1 \\ &= 3 + 3 + 1 + 1 + 1 \\ &= 3 + 2 + 2 + 1 + 1 \\ &= 2 + 2 + 2 + 2 + 1 \end{aligned}$$

따라서, 구하는 방법의 수 $p(9, 5) = 5$ 이다

('08) 9의 분할 중에서 홀수의 합으로만 만들어지는 서로 다른 분할의 형태의 개수는?
[3점]

- ① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

$\Rightarrow$ 홀수 k 개의 합이 홀수가 되려면 k 는 홀수이어야 한다.

1개의 수 : 9
3개의 수 : $1+1+7, 1+3+5, 3+3+3$
5개의 수 : $1+1+1+1+5, 1+1+1+3+3$
7개의 수 : $1+1+1+1+1+1+3$
9개의 수 : $1+1+1+1+1+1+1+1+1$

따라서 서로 다른 분할은 모두 8개이다.

2장 그래프 (11문항 출제. 44%)

1. 그래프의 뜻: 그래프, 변, 꼭지점, 차수

“그래프(graph)”란, 유한개의 점(“꼭지점(vertex)”이라 부르겠습니다)과 선(“변(edge)”이라고 하지요)으로 이루어진 그림을 말합니다. 모든 꼭지점이 어떤 형태로든 다 연결되어 있으면 “연결(connected) 그래프”, 그렇지 않으면 “비연결(nonconnected) 그래프”라고 합니다. 한 꼭지점에는 하나 이상의 변이 연결될 수 있습니다. 이 때, 한 꼭지점에 연결된 변의 개수를 그 꼭지점의 “차수(order, valence)”라고 부릅니다.

그래프에서 변은, 편의상 직선으로 나타냅니다만, 꼭 직선일 이유는 없습니다. 따라서, 같은 개념의 그래프를 전혀 다른 모양의 그림으로 나타낼 수 있습니다. (사실 이것이 그래프에 대한 재미있는 사실이면서 좀 어려움을 느끼는 내용이기도 하지요.) 두 그래프가 같은 것인지 다른 것인지를 찾아내는 방법중에 하나는, 꼭지점의 개수가 같은 지를 확인하고 각각의 차수가 같은 지를 알아보는 것입니다. 개수도 같고 차수도 같으면 당연히 같은 그래프가 되겠지요. 기출문제를 보겠습니다.

(’07) 그래프 G 는 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8을 꼭지점으로 하고, 약수 또는 배수 관계에 있는 서로 다른 두 꼭지점을 연결한 선 모두를 변으로 한다. 그래프 G 에서 차수가 3인 꼭지점의 개수는? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

 각 숫자에 대하여 약수 또는 배수관계에 있는 수를 나열하면

1 ; 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	2 ; 1, 4, 6, 8
3 ; 1, 6	4 ; 1, 2, 8
5 ; 1	6 ; 1, 2, 3
7 ; 1	8 ; 1, 2, 4

따라서, 차수가 3인 꼭지점은 4, 6, 8의 3개이다.

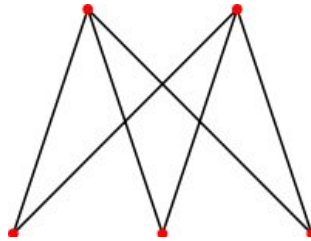
2. 완전그래프, 평면그래프

모든 꼭지점이 가능한 모든 변으로 연결되어 있을 때, “완전그래프(complete graph)”라고 합니다. 예를 들어, 삼각형이나 대각선을 다 이은 사각형, 별모양을 안에 그려넣은 오각형 등이 있겠지요. 이 때, 주의하실 사항은, 대각선을 잇거나 별을 그릴 때 새로 생기는 교차점은 꼭지점으로 취급하지 않습니다. 꼭지점은 애시당초에 네 개다, 다섯 개다 이런 식으로 미리 정해놓고 이야기를 시작하는 것입니다. 대각선을 긋거나 어찌어찌 변을 잇다가 생기는 교차점에서 헛갈리지 않으려면 3차원적으로 그림을 생각하시면 되겠습니다. 예를 들어, 서울-부산 비행기와 광주-강릉의 비행기의 항공노선을 지도 위에 그려본다면 분명 겹치는 점이 있습니다. 그러나, 실제로는 두 비행기의 고도가 다름테니 비록 교차되는 지점이 있다손 치더라도 하늘에서 충돌하거나 하는 일은 없지 않겠습니까? 사각형에서의 대각선도 그런 식으로 이해하면 되겠습니다.

어떤 그래프는, 다시 자알 그려보면 교차점이 생기지 않도록 다시 그릴 수 있지만 그렇게 되지 않는 것들도 많습니다. 다시 자알 그려서 교차점이 생기지 않게 된 그래프를 “평면 그래프(planar graph)”라고 부릅니다.

또한 “이분 그래프 (Bipartite graph) 라는 것이 있습니다. 이것은, 그래프의 꼭지점이 서로 소인 두 집합으로 나뉘질 수 있고, 각 집합 안에 있는 꼭지점을 연결하는 변은

없는 경우의 그래프를 말합니다. 예를 들자면 아래와 같은 그래프입니다.



기출문제를 보겠습니다.

('05) 정 10 각형 모양의 그래프를 완전그래프로 만들기 위하여 더 그려 넣어야 할 변의 개수는? [3점]

- ① 25 ② 35 ③ 45 ④ 55 ⑤ 65

☞ 10개의 꼭지점을 연결하는 방법이 수는 ${}_{10}C_2 = 45$
이 때, 10 각형의 10개의 변을 빼면 $45 - 10 = 35$

3. 경로와 회로

“경로(path)”란 한 꼭지점에서 다른 꼭지점으로 가는 길을 말합니다. 경부선 KTX 노선도가 주어진 그래프라면, 서울-대전, 서울-대전-대구 등이 예가 될 수 있습니다. 경로 중에서 다시 출발했던 꼭지점으로 되돌아오는 길이 있으면 그 경로를 “회로(circuit)”라고 부릅니다. 이런 경로와 회로 중에서, 주어진 그래프의 “모든 변”이나 “모든 꼭지점”을 다루는 특수한 경로와 회로가 있습니다. 모든 변에 대해 연구해서 정리를 내어놓은 사람은 유명한 수학자 오일러이고, 모든 꼭지점에 대해 연구해서 정리를 내어놓은 사람은 좀 덜 유명한 해밀턴입니다.

“오일러 경로(Euler path)”와 “오일러 회로(Euler circuit)”는 모든 변을 단 한번만 지나는 경로와 회로를 말합니다. 흔히 ‘한붓 그리기’로 알려져 있습니다. 어떤 그래프는 오일러 회로를 가지고 있지만 그렇지 않은 그래프도 있습니다. 한 그래프 안에 오일러 회로가 있을 필요충분 조건은,

– 연결그래프여야 하고, 각 꼭지점의 차수가 모두 짝수여야 합니다.

* 만약 두 꼭지점의 차수가 홀수이고 나머지 꼭지점의 차수가 모두 짝수라면 그 그래프는 “오일러 경로”를 가지겠지요.

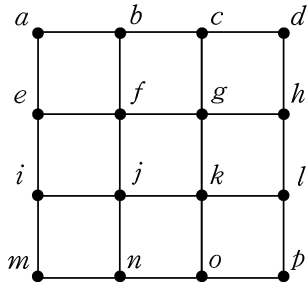
“해밀턴 경로(Hamilton path)”와 “해밀턴 회로(Hamilton circuit)”는 모든 꼭지점을 단 한번만 지나는 경로와 회로를 말합니다. 주어진 그래프에서 해밀턴 경로나 회로가 있을 필요충분조건은 아직까지도(!) 수학자들이 해매고 있는 난제 중에 난제입니다.

오일러 회로와 해밀턴 회로의 좋은 예로 “우체부”를 들 수 있습니다. 우체국에서 출발해서 자기가 맡은 구역의 우체통을 다 수거한 다음 다시 돌아오는 게 우체부의 역할이라고 합시다. 우체국을 한 꼭지점으로, 그리고 맡은 구역의 길목들을 다른 꼭지점들이라고 하고, 각각의 길을 변이라고 볼 수 있습니다. 이 때, 만약 모든 우체통이 각 길의 중간 즈음에 자리 잡고 있다면, 우체부는 어쨌든 그 우체통이 있는

길을 다 방문해서 돌아와야 되겠지요. (오일러 회로) 만약 모든 우체통이 길목에만 배치되어 있다면 모든 길목만 방문해서 돌아오면 되겠지요. (해밀턴 회로)

기출문제를 보겠습니다.

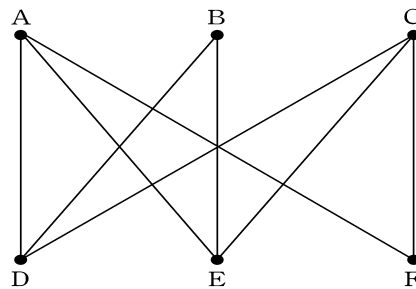
('06) 그림과 같이 a 부터 p 까지 16 개의 꼭지점을 가지고 있는 평면그래프가 있다. 이 그래프의 꼭지점 전체의 집합 $\{a, b, c, d, \dots, p\}$ 를 분할할 때, 분할에 있는 모든 부분집합의 각 꼭지점들이 그래프에서 회로를 이루도록 분할하는 방법의 수는? (단, 전체집합은 분할의 방법에서 제외한다.) [4점]



- ① 16 ② 14 ③ 12 ④ 10 ⑤ 8

☞ 꼭지점이 4개인 회로 4개: 1가지
 꼭지점이 4개인 회로 2개 & 8개인 회로 1개: 4가지
 꼭지점이 4개인 회로 1개 & 12개인 회로 1개: 5가지
 꼭지점이 8개인 회로 2개: 2가지
 따라서, 전체 12가지이다.

('08) 6개의 꼭지점 A, B, C, D, E, F를 갖는 다음 그래프 G에 대한 <보기>의 설명에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점]



<보 기>

- ㄱ. 그래프 G는 해밀턴회로를 갖는다.
 ㄴ. 그래프 G에 2개의 변을 추가하여 오일러회로가 존재하는 그래프로 만들 수 있다.
 ㄷ. 그래프 G는 평면그래프이다.

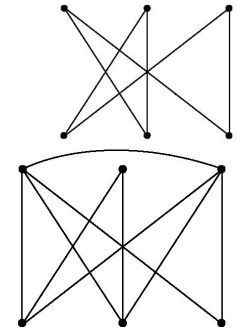
- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

☞ ㄱ. 오른쪽 그림과 같은 해밀턴 회로가 존재한다.

∴ 참

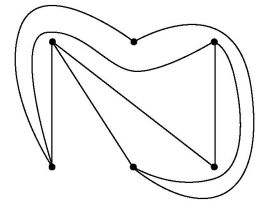
ㄴ. A, B, C, D가 홀수점이므로 A-C를 잇고 D-E를 이으면 오일러 회로가 존재한다.

∴ 참



ㄷ. 오른쪽 그림과 같은 평면그래프로 바꿀 수 있다.

∴ 참



4. 생성수형도

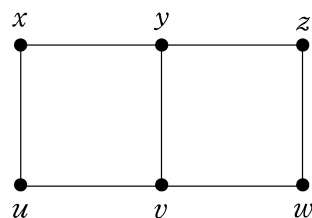
연결된 그래프에서 변을 삭제하여 얻어지는 수형도를 그 그래프의 생성수형도 (Spanning Tree) 라고 합니다. 생성수형도의 개수를 구하는 몇 가지 방법들이 있습니다. 예를 들어,

- 1) 주어진 그래프가 수형도일 경우, 생성수형도는 그 자신밖에는 안되니까 한 가지 뿐입니다.
- 2) n개의 꼭지점에서 각 꼭지점이 인접한 꼭지점끼리만 연결된 다각형 모양의 그래프일 경우, 한 변만 지우면 생성수형도가 되니까 n개의 생성수형도가 가능합니다.
- 3) n개의 꼭지점이 있는 완전그래프에서는 n^{n-2} 개의 생성수형도가 존재합니다. 이것을 케일리의 정리 (Caley's Formula)라고 합니다. [증명 별첨]
- 4) 일반적으로 n개의 꼭지점이 있는 연결그래프에서는 키르호프의 정리 (Kirchhoff's Theorem)를 이용해서 구하는데, 이것은 내용도 증명도 너무 어렵습니다.

해서, 복잡한 1)~3)의 예가 아닌 그래프에서는, 생성수형도의 개수를 체계적으로 손으로 세서 계산하는 게 일반적입니다. “꼭지점이 n개가 주어지면 변의 개수는 n-1이 되어야 한다. 없앨 수 있는 건 어느 것일까?”에서 출발하는 것이죠. 기출문제를 보겠습니다.

('05) 오른쪽 그래프의 서로 다른 생성수형도의 개수는? [3점]

- | | |
|------|------|
| ① 10 | ② 12 |
| ③ 15 | ④ 18 |
| ⑤ 21 | |

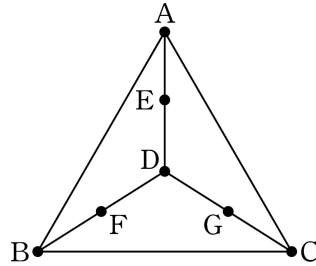


☞ 위의 그림에서 꼭지점이 6개니까 생성수형도의 변은 5개가 필요합니다. 그런데 지금 주어진 변이 7개니까, 2개를 지워야겠지요. ${}_7C_2$. 차수가 3인 y나 v는 두 개를 지워도 연결에 큰 지장은 없습니다. 그런데, 차수가 2인 x,u,w,z를 살펴보면, 일단 각각이 고립되면 안될 것이고 (4가지), 변 xu나 변 zw가 고립되어서도 안되겠지요. (2가지). 따라서, 생성수형도의 개수는 $21-6=15$ 가 됩니다.

이 문제에서는 실제로 생성수형도를 그려보는 것도 좋은 방법입니다. (15개는 좀 많은가요?) 고등학교 과정에서는 그리 숫자가 큰 경우를 다루지 않는 것이 좋을 듯 한데 2009년도 기출문제에서 이런 바람이 빚나가 버렸습니다.

(‘09) 다음 그래프의 서로 다른 생성수형도의 총 개수를 구하시오.

[4점]



☞ 위의 문제와 같은 원리를 이용하겠습니다. 즉, 점이 고립되거나 변이 고립되는 경우를 잘 따져서 계산한다는 것입니다.

일단, 주어진 점은 7개입니다. 따라서, 생성수형도를 위해서는 변이 6개만 있으면 됩니다. 그림에서 주어진 변은 모두 9개이니 3개를 지워야 합니다. (${}_9C_3 = 84$) 그런데, 아무거나 세 개를 지우면 안되겠기에 따져봐야 합니다. (이 문제는 이 과정이 위의 문제보다 조금 복잡합니다. 그래서 4점짜리인 듯 합니다.)

일단 차수가 3인 꼭지점들로 이어진 변을 모두 지워서 고립되면 안됩니다. 이 경우는 A, B, C, D의 4가지가 있습니다.

두 번째로, 차수가 2인 꼭지점들로 그 두 변을 모두 지우고 나머지 7개의 변 중에서 아무거나 하나를 지우면 고립됩니다. 여기에 해당되는 꼭지점은 E, F, G가 있으니 경우의 수는 $7 \times 3 = 21$ 가지가 있습니다. 이렇게 해서 꼭지점들이 고립되는 상황은 다 살펴보았습니다.

이제 변이 고립되는 상황을 보도록 하겠습니다.

일단, 차수가 3인 A, B, C들과 연결된 AB, BC, CA는 고립될 수가 없으니 쳐다 볼 필요가 없습니다.

차수가 2인 E, F, G와 연결되어 있는 안쪽의 여섯 개의 변(AE, ED, BF, FD, CG, GD)은 각각 그 주변의 세 변을 모두 지워버리면 고립됩니다. 따라서, 이런 경우가 6가지 있습니다.

이렇게 보면 다 살펴보았나 싶은데... 위의 문제와는 달리 이 문제가 4점짜리인 이유는 “하나 이상의 변이 고립될 수도 있다”는 데에 있습니다.

변이 두 개가 고립될 수 있을까요? 그림을 잘 살펴보면 DE-DF, DF-DG, DG-DE 는 각각 그 주변의 세 변을 모두 지워버리면 고립됩니다. 따라서, 이런 경우가 3가지 있습니다.

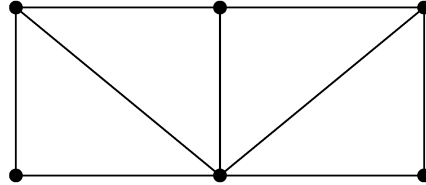
변이 세 개가 고립될 수 있을까요? 그림을 잘 살펴보면 DE-DF-DG는 그 주변의 세 변을 모두 지워버리면 고립됩니다. 따라서, 이런 경우가 1가지 있게 됩니다.

그리고, 변을 네 개 이상 고립시키려면 차수가 1인 점들이 3개뿐이니 차수가 3인 점들이

최소한 2개 포함되는데, 3개의 변만을 지워서는 이렇게 고립시킬 수가 없습니다.

따라서, 구하는 답은 $84-4-21-6-3-1=49$ 가지가 됩니다.

('08) 다음과 같이 꼭지점이 6개이고 변이 9개인 그래프 G 가 있다. 그래프 G 를 완전그래프로 만들기 위하여 추가하여야 할 변의 개수는 a 이고, 그래프 G 의 생성수형도를 만들기 위하여 지워야 할 변의 개수는 b 이다. ab 의 값을 구하시오. [4점]



☞ 꼭지점이 6개, 변이 9개이므로 완전그래프가 되기 위해서는 15개의 변이 있어야 하므로 6개를 추가해야 한다.

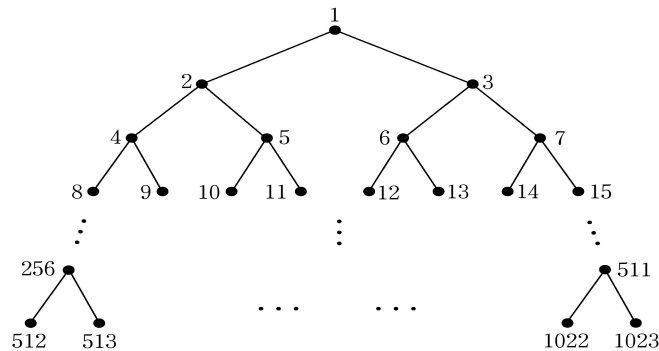
$$\therefore a = 6$$

생성수형도가 되기 위해서는 5개의 변이 있어야 하므로 4개의 변을 지워야 한다.

$$\therefore b = 4$$

$$\therefore ab = 24$$

('07) 다음은 1023개의 꼭지점을 갖는 수형도에 1부터 1023까지 연속된 자연수를 각 꼭지점에 규칙적으로 대응시킨 것이다.



1이 대응된 꼭지점에서 a 가 대응된 꼭지점까지 가는 경로와 1이 대응된 꼭지점에서 b 가 대응된 꼭지점까지 가는 경로에 공통으로 포함되는 꼭지점에 대응된 자연수 중 최대값을 $M(a, b)$ 라 하자. 예를 들어, $M(4, 11)=2$, $M(7, 12)=3$ 이다. $M(33, 79)=k$ 라 할 때, $10k$ 의 값을 구하시오. [4점]

☞ a 가 대응된 꼭지점의 바로 위쪽에 있는 꼭지점을 b 라 하면 (단, $a \neq 1$)

$$b = \begin{cases} \frac{a}{2} & (a \text{가 짝수}) \\ \frac{a-1}{2} & (a \text{가 홀수}) \end{cases}$$

가 성립한다.

$$33 \Rightarrow 16 \Rightarrow 8 \Rightarrow 4 \Rightarrow 2 \Rightarrow +1$$

$$79 \Rightarrow 39 \Rightarrow 19 \Rightarrow 9 \Rightarrow 4 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1$$

따라서, $10k = 10 \times M(33, 79) = 40$ 이다.

답 40

5. 행렬과 그래프: 인접행렬

인접행렬은 그래프의 연결상태를 행렬로 표시한 것을 말합니다. 그래프의 꼭지점을 1부터 n 까지 번호를 매깁니다. 이 때, 꼭지점 i 와 j 가 연결되어 있으면 행렬의 (i, j) 성분은 1, 그렇지 않으면 0이 됩니다.

그래프를 인접행렬로 나타내면 각 꼭지점과의 연결상태를 한 눈에 파악할 수 있을 뿐 아니라, A^n 을 계산했을 경우, 그의 (i, j) 성분은 i 에서 j 까지 길이가 n 인 경로 (즉, n 개의 변을 지나서 가는 길)가 개수가 됩니다. 따라서, A^2 의 대각성분은 원래 그래프의 꼭지점의 차수가 되겠지요. (인접한 점까지 갔다가 자기 자신까지 되돌아오는 경로의 길이는 2가 되니까요.) 기출문제를 보겠습니다.

('07) 꼭지점이 5개인 그래프 G 의 인접행렬을 A 라 할 때, 다음은 A^2 을 나타낸 것이다.

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

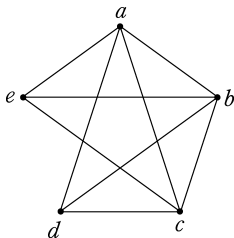
그래프 G 에 대한 <보기>의 설명에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

————<보 기>————

- ㄱ. 차수가 3인 꼭지점은 2개이다.
 ㄴ. 해밀턴회로를 갖는다.
 ㄷ. 서로 다른 두 꼭지점을 잇는 2개의 변으로 이루어진 경로는 2개 이상이다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

☞ A^2 의 대각선에 있는 수는 그래프 각 꼭지점에 있는 차수와 같다. 꼭지점을 순서대로 a, b, c, d, e 라 하면 각 꼭지점의 차수는 4, 4, 4, 3, 3이므로 그래프를 그리면 다음과 같다.

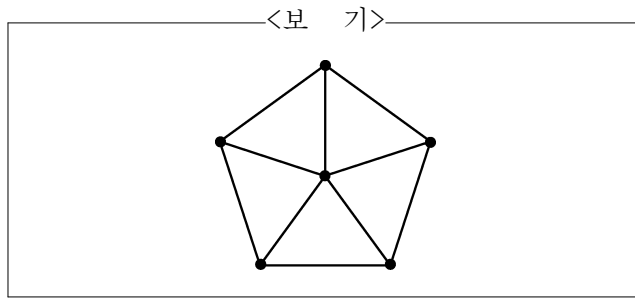


- ㄱ. 차수가 3인 꼭지점은 d, e 로 2개 있다. $\therefore$ 참
 ㄴ. $a-c-e-b-d-a$ 등의 해밀턴 회로를 갖는다. $\therefore$ 참
 ㄷ. A^2 의 모든 성분이 2 이상이므로 경로도 2개 이상이다. $\therefore$ 참

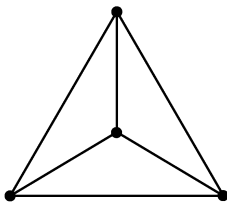
6. 색칠 문제

그래프의 꼭지점을 칠하는 데, 연결된 꼭지점끼리는 다른 색깔로 칠할 경우 필요한 최소한의 색의 개수를 구하는 문제들입니다. 일반적인 경우의 해법은 아직까지 풀리지 않은 수학의 난제중 하나입니다. 고교과정에서는 차근차근 칠해가면서 따져보는 정도에 지나지 않습니다. 기출문제를 보겠습니다.

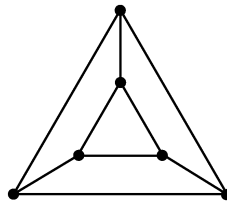
('06) 적절하게 꼭지점을 색칠하는 최소의 색의 수가 <보기>의 그래프와 같은 그래프는? [3점]



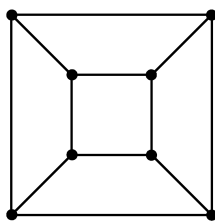
①



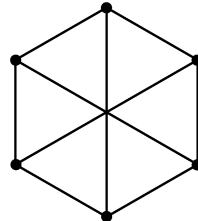
②



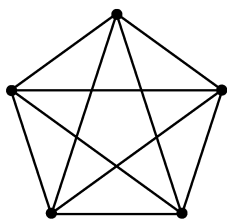
③



④



⑤

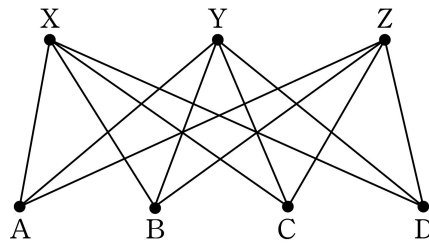


☞ 보기는 4가지 색으로 색칠이 가능합니다.

1번은 4가지, 2번은 3가지, 3번은 2가지, 4번은 2가지, 5번은 5가지가 필요합니다.

('09) 꼭짓점 A, B, C, D, X, Y, Z로 이루어진 다음 그래프에 최소 개수의 변을

추가하여 꼭짓점을 적절하게 색칠하는 데 필요한 최소 색의 수가 4인 그래프 H 를 만들 때, 가능한 그래프 H 의 개수는? [3점]



- ① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

☞ 이 문제는 두 가지 사실을 염두에 두면 그렇게 풀기 어렵지는 않을 듯 합니다.

- 1) 이분그래프는 두 가지 색깔로 꼭지점을 다 칠할 수 있다.
- 2) 꼭지점을 색칠하는 데 필요한 최소 색의 수가 4면서 꼭지점의 수가 가장 작은 그래프는 4점으로 이루어진 완전그래프이다.

위의 그림은 완전 이분그래프 (서로 다른 집합의 원소들끼리는 빠짐없이 연결되어 있는 이분그래프)입니다. 완전 이분그래프이기 때문에 그림에서 변을 추가할 수 있는 방법은 XYZ끼리 연결하거나 ABCD끼리 연결하는 방법 뿐입니다. 그리고 이분그래프이니 두 가지 색깔로 꼭지점을 다 칠할 수 있습니다. 따라서, 두 가지 색깔이 더 필요한데, 4점으로 이루어진 완전그래프를 그리려면 최소한 두 변을 추가해야 합니다.

위의 XYZ중에서 하나를 잇고 아래 ABCD중에서 하나를 잇는다면 (즉, 두 변만 추가한다면) 꼭지점 4개로 된 완전그래프를 그릴 수 있습니다. (예를 들어, ABXY) 따라서, 가능한 그래프의 개수는 ${}_3C_2 \times {}_4C_2 = 18$ 입니다.

만약, 두 변을 어느 한쪽 집합, 즉 위의 XYZ에만 추가하거나 아래 ABCD에만 추가할 경우에는 3가지 색이면 충분하게 됩니다. 따라서, 이 경우는 문제의 조건을 만족시키지 못합니다.

3장 알고리즘 (4문항 출제. 16%)

1. 여러 가지 수열: 점화식

기출문제를 보겠습니다.

('05) 자연수 k 에 대하여 $n = 5^k$ 일 때, $f(n)$ 이

$$f(5n) = f(n) + 3, \quad f(5) = 4$$

를 만족시킨다. $\sum_{k=1}^{10} f(5^k)$ 의 값을 구하시오. [4점]



$$f(5) = 4$$

$$f(5^2) = f(5 \cdot 5) = f(5) + 3 = 4 + 3$$

$$f(5^3) = f(5 \cdot 5^2) = f(5^2) + 3 = 4 + 3 + 3$$

$$\vdots$$

01므로 $f(5^k) = 4 + (k-1) \cdot 3 = 3k + 1$

$$\therefore (\text{주어진 식}) = \sum_{k=1}^{10} (3k+1) = 175$$

(‘09) 수열 $\{a_n\}$ 이 점화 관계

$$\begin{cases} a_1 = 1, & a_2 = 2 \\ a_{n+2} + a_{n+1} + a_n = 6 & (n = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{11} a_k$ 의 값은? [3점]

- ① 15 ② 18 ③ 21 ④ 24 ⑤ 27

 쉬운 문제입니다만 문제가 11개의 합만 묻고 있으니 수열의 항을 하나씩 구해서
답하려고 덤비다가는 시간을 많이 잡아먹게 됩니다. 수열의 두 번째 규칙으로부터
어떻게 인접해 있는 인접한 세 항의 합은 6이 됩니다. 따라서,
 $a_{11} + a_{10} + a_9 = 6$ 이고, $a_8 + a_7 + a_6 = 6$ 이고 $a_5 + a_4 + a_3 = 6$ 이 됩니다. 여기에 처음 두 항만
더 더하면 되니까 답은 $6+6+6+2+1=21$ 이 됩니다.

2. 세 항 사이의 특별한 관계: 피보나치 수열

피보나치 수열은 $F_1 = 1, F_2 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ 으로 주어집니다.

수능에 출제되었던 문제 중에서 피보나치 수열과 비슷한 점화식의 합을 묻는 문제가
있었는데, 아래 식이 참고가 될 듯 합니다.

F_n 이 피보나치수열, 혹은 그와 비슷한 점화식일 때, (즉 $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$)

$$\sum_{i=1}^n F_i = F_{n+2} - F_2$$

$$\begin{aligned} (\text{증명}) \quad & F_3 - F_2 = F_1 \\ & F_4 - F_3 = F_2 \\ & \dots \quad \dots \\ & F_{n+2} - F_{n+1} = F_n \end{aligned}$$

양변을 더하면 $F_{n+2} - F_2 = \sum_{i=1}^n F_i$ 가 됩니다.

기출문제를 보겠습니다.

(‘06) 두 수열 $\{F_n\}$, $\{L_n\}$ 은 다음 점화 관계를 만족시킨다.

$$F_1 = 1, F_2 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n \geq 3)$$

$$L_1 = 2, L_2 = 1, L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \quad (n \geq 3)$$

이때, $L_1 + L_2 + \dots + L_{10}$ 과 같은 것은? [4점]

- ① $F_{10} + F_{12}$ ② $F_{10} + F_{12} - 1$

③ $L_{11} + L_{12}$

④ $L_{11} + L_{12} - 1$

⑤ $F_{10} + L_{11}$

☞ 위의 L_n 을 루카스 수열 (Lucas Sequence)이라고 합니다. (초기값만 약간 다른...) 문제는 결국 $L_{12} - L_2 = L_{12} - 1$ 의 다른 형태를 구하는 게 됩니다. 보기를 보니 결국은 L_n 과 F_n 사이의 관계를 구해야 되겠지요. 고등학교의 점화식은 일반항을 구하지 않고 처음 몇 수열을 통해서 추측을 하게끔 합니다. 몇 개 써 보지요.

$L_n: 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, \dots$

$F_n: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$

여기서 보면 세 번째 항부터 $L_n - F_n = F_{n-2}$ 가 됩니다.

따라서, $L_{12} - F_{12} = F_{10}$ 이 되겠니, $L_{12} - 1 = F_{12} + F_{10} - 1$ 이 되겠지요.

('08) 자연수 n 에 대하여 세 문자 A, B, C를 중복을 허용하여 만든 n 자리 문자열 중에서 다음 두 조건을 만족시키는 문자열의 개수를 a_n 이라 하자.

(가) 같은 문자가 연속하여 나올 수 없다.

(나) A의 바로 뒤에 B는 나올 수 없다.

수열 $\{a_n\}$ 은 점화 관계 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

을 만족시킨다. a_6 의 값은? [4점]

① 22

② 26

③ 30

④ 34

⑤ 38

☞ 초기값이 빠져있는 피보나치 수열의 형태입니다. 초기값만 잘 구해서 차근차근 대입하면 됩니다.

$a_1 = 3, a_2 = 5$ 이므로 (a_2 중 AA, BB, CC, AB는 제외)

$a_3 = 8, a_4 = 13, a_5 = 21, a_6 = 34$

4장 의사 결정과 최적화 (5문항 출제. 20%)

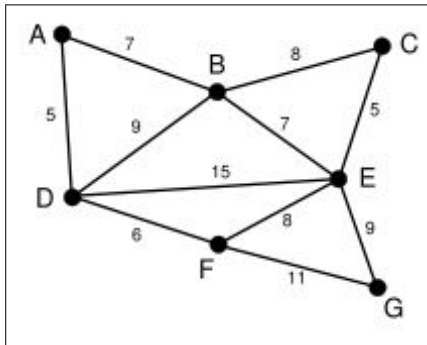
1. 그래프와 최적화

각 변마다 값이 다른 연결그래프에서 변의 합이 최소가 되는 생성수형도를 찾는 알고리즘을 크루스칼 알고리즘 (Kruskal's algorithm) 이라고 합니다. 이 알고리즘은 단순하면서도 상당히 효과적인 방법입니다.

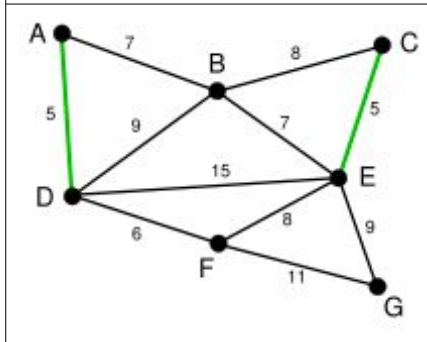
우선, 주어진 연결그래프에서 n 개의 꼭지점만 있고 변은 없다고 가정합니다.

그리고 다음의 방법을 n 개의 꼭지점이 다 연결될 때까지 다음의 방법을 계속하는 것입니다. “주어진 그래프에서 가장 작은 값을 가지는 변을 하나씩 그려 나가되 회로가 구성되지 않도록 한다.”

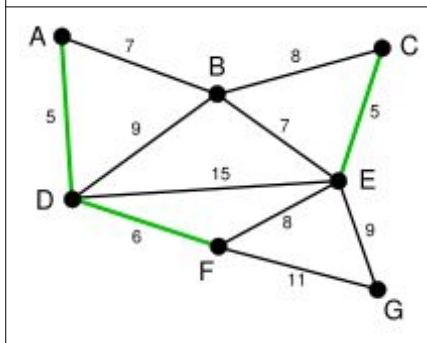
알고리즘의 실제적인 예를 아래의 그래프를 통해 생각해 보겠습니다.



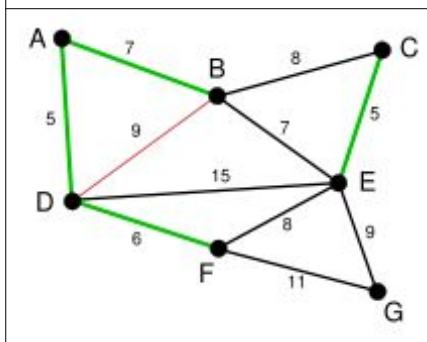
왼쪽과 같이 주어진 그래프가 있습니다. 각 변의 길이는 각 지점을 운행하는 데 드는 비용을 나타냅니다. 목표는, 가장 최소한의 비용으로 모든 지점을 다 거치는 것입니다. 편의상 각 변은 표시가 안되어 있다고 생각하겠습니다.



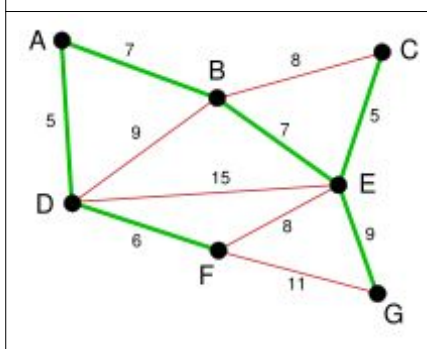
그래프에서 보면 AD와 CE가 가장 작은 값을 가집니다. 그리고 이 둘을 연결한다고 해서 회로가 생기지는 않으니까 둘 다 그립니다.



그 다음 값은 DF입니다. 그립니다.



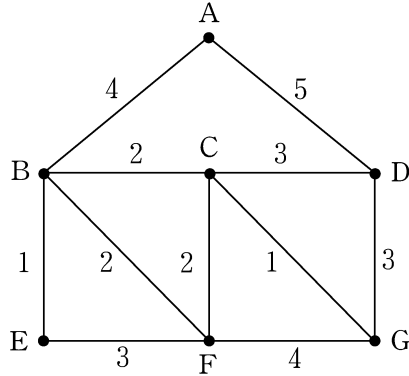
그 다음 작은 값은 AB 와 BE입니다. 따라서, 이 둘을 선택합니다. 그리고 이 과정에서 BD는 자동으로 탈락됩니다. 왜냐하면 회로 ABD를 이루게 되기 때문입니다.



이런 식으로 계속 해 나가면 왼쪽과 같은 최소 생성수형도를 얻게 됩니다.

비록 그 명칭은 교과서에 등장하지 않지만, 크루스칼의 알고리즘을 이용하는 문제는 수능시험에 종종 출제 됩니다. 기출문제를 보겠습니다.

('06)다음 그림은 일곱 개의 마을 A, B, C, D, E, F, G를 꼭지점으로 하는 그래프의 변 위에 두 마을 사이의 상수도관을 설치하는 데 필요한 비용을 써 넣은 것이다. 모든 마을이 수돗물을 공급받을 수 있도록 상수도관을 설치하려고 한다. 상수도관을 설치하는 데 필요한 최소 비용은? (단, 단위는 억원이다.) [3점]



- ① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

제일 먼저 BE와 CG를 선택합니다.

다음, BC, CF, BF 모두를 선택하면 회로가 형성되니까 셋 중 임의로 두 개만 선택합니다. 편의상 BF와 BC가 선택되었다고 하지요.

그 다음 후보는 CD와 DG, EF입니다. EF를 선택하면 회로가 되니까 안되고, CD와 DG는 두 개를 한꺼번에 선택하면 회로가 되니까 둘 중 하나만 선택합니다. (편의상 CD라고 하지요.)

다음 후보는 AB와 FG입니다. AB는 선택해도 되지만 FG는 회로를 구성하니까 안되겠죠. 이렇게 해서 모든 꼭지점이 이어진 생성수형도가 완성되었습니다.

최소비용은 $4+1+2+2+1+3=13$ 억원입니다.

('08) 5개의 지역 A, B, C, D, E에 모두 전기를 공급하기 위하여 전기선을 가설하려고 한다. 두 지역 간에 전기선을 가설하는 비용은 다음과 같다.

	A	B	C	D	E
A		3	7	4	5
B	3		2	5	1
C	7	2		10	6
D	4	5	10		3
E	5	1	6	3	

5개의 지역이 모두 연결되도록 전기선을 가설하는 데 필요한 최소 비용은? (단, 단위는 억원이다.) [3점]

- ① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

☞ 일단 표를 그래프로 나타내도록 합니다. 이 때, 각 변에 해당되는 비용을 써 넣습니다.
 그리고 크루스칼의 알고리즘을 이용합니다.
 다섯 개의 점으로 이루어진 생성수형도이므로 마을과 마을을 잇는 변이 4개 필요하다.
 가장 비용이 적게 드는 B-E를 잇는다. (1억 원)
 B, E와 A, C, D 중 하나를 잇는 경로 중 가장 비용이 적게 드는 B-C를 잇는다. (2억 원)
 B, C, E와 A, D 중 하나를 잇는 경로 중 가장 비용이 적게 드는 A-B를 잇는다. (3억 원)
 D와 A, B, C, E를 잇는 경로 중 가장 비용이 적게 드는 D-E를 잇는다. (3억 원)
 따라서 최소 비용은 9억 원이다.

비용의 '최소'값을 구하는 것과는 달리, 일을 전부 끝내는 데에 최소한도로 필요한 시간을 구하는 문제를 다루는 것을 Critical Path Analysis 라고 합니다. 여기에서는 각 꼭지점이 한 작업을 하는 데 걸리는 시간을 나타내고 각 변은 작업들 사이의 선행관계를 나타나게 됩니다. 따라서, 제일 처음에 시작해야 하는 작업으로부터 뻗어나간 가장 긴 경로가 구하는 최소한의 시간이 됩니다. 기출문제를 보겠습니다.

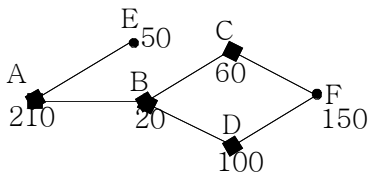
('05) 다음은 이사갈 집의 내부를 수리하는 데 필요한 작업, 작업 시간, 선행 작업을 나타낸 표이다.

작업	작업 시간(분)	선행 작업
벽지 도배(A)	210	없음
전구 교체(B)	20	A
욕실 수리(C)	60	B
부엌 수리(D)	100	B
커튼 교체(E)	50	A
장판 교체(F)	150	C, D

위의 작업을 모두 끝마치는 데 필요한 최소 작업 시간은? [4점]

- ① 260 분 ② 370 분 ③ 440 분 ④ 480 분 ⑤ 530

☞ 주어진 작업을 그래프로 나타내는데, 이 때 꼭지점 밑에 그 작업을 마치는 데 필요한 시간을 써 넣도록 하고, (시간과는 상관없이) 두 번째로 이루어지는 작업은 같은 세로줄에 맞춰서 그래프를 그리면 보기에 좀 좋습니다.



전체작업을 마치기 위해 필요한 최소의 시간은 A에서 F로 가는 경로 중에서 작업 시간이 가장 긴 경로는 $A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow F$ 이고, 그 시간은 $210 + 20 + 100 + 150 = 480$ (분)입니다.

('09) 다음 표는 어떤 공장에서 특정 상품을 만들기 위해 필요한 작업과 각 작업에 걸리는 시간 및 작업의 순서 관계를 나타낸 것이다.

작업	작업 시간(일)	먼저 행해져야 할 작업
A	2	없음
B	3	A
C	5	A
D	3	A, C
E	2	B, C
F	4	D
G	3	E, F

위 표에 있는 작업을 모두 끝마치는 데 필요한 최소 작업 시간(일)은? [3점]

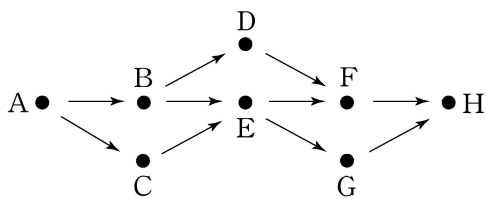
- ① 21 ② 20 ③ 19 ④ 18 ⑤ 17

☞ 이번엔 위의 문제와 같은 그래프인데, 같은 순서에 있는 작업 중에서 오래 걸리는 것 뒤로만 다음 작업을 연결해서 그린 것입니다.

A(2) → B(3)
 C(5) → D(3) → F(4) → G(3)
 E(2)

따라서, 제일 긴 경로가 ACDFG이고 이때 걸리는 시간은 모두 $2+5+3+4+3=17$ 시간입니다.

('07) 다음은 어느 공장에서 상품을 만드는 데 필요한 작업과 그 순서 관계를 나타낸 것이다.



각 작업에 걸리는 시간이 다음 표와 같을 때, 작업을 모두 마치는 데 필요한 최소의 작업 일 수는? [3점]

작업	A	B	C	D	E	F	G	H
작업 시간(일)	3	5	3	7	3	5	6	2

- ① 18 ② 22 ③ 26 ④ 30 ⑤ 34

☞ 주어진 그래프에서 Critical Path를 만들어 봅시다.

- 1) A 다음에 B와 C가 있는데 B가 더 오래 걸립니다. A-B
 2) B 다음에 D와 E가 있는데 D가 더 오래 걸립니다. A-B-D

- 3) D 다음에는 F와 G가 있는데 G가 1시간 더 걸립니다. 그런데, G의 선행 작업은 D가 아니라 E이고 E는 D보다 4시간이나 덜 걸리니까 결국 G보다 F가 더 늦게 끝나게 됩니다. A-B-D-F
- 4) F다음에는 H뿐이네요. A-B-D-F-H
- 따라서, 최소 작업일수는 $3+5+7+5+2=22$ 일입니다.