Phillips Exeter Academy – Mathematics 4C – page 3 – problem 2

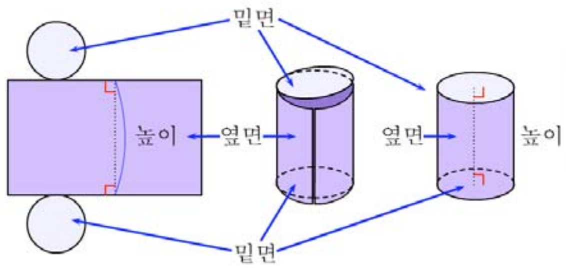
Garbanzo bean cans usually hold 4000 cc (4 liters). It seems likely that the manufacturers of these cans have chosen the dimensions so that the material required to enclose 4000 cc is as small as possible. Let's find out what the optimal dimensions are.

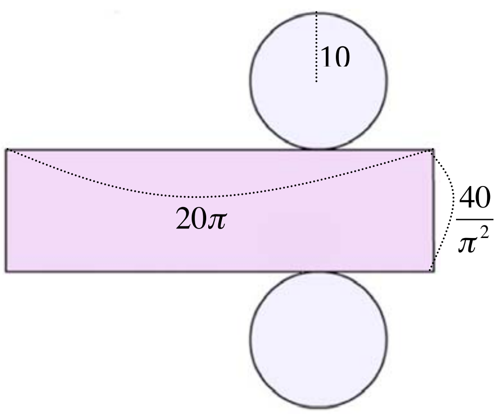
(a) Find an example of a right circular cylinder whose volume is 4000. Calculate the total surface area of your cylinder, in square cm.

(b) Express the height and surface area of such a cylinder as a function of its radius *r*.

(c) Find the value of *r* that gives a cylinder of volume 4000 the smallest total surface area that it ca have, and calculate the resulting height.

(a) 한국의 교육과정 중 수2 "최대 최소와 미분" 단원에 나오는 문제다. 부피가 4000 cc가 되는 직원기둥의 예를 하나만 들어보라는 문제다. 이 문제의 정답은 여러 개다. 여러 가지 가능성이 있기 때문에 부피가 4000 cc만 된다면 모두 정답이 될 수 있다. 예를 들어, 밑면의 반지름이 10 cm이고 높이가 $\frac{40}{\pi^2}$ cm 이면 부피가 4000이 된다. 또한 직원기둥의 전개도가 아래 그림과 같기 때문에 겉넓이는 (두 원의 넓이) + (직사각형의 넓이) 이고 $\left(2\times 10^2\pi\right)+\left(20\pi\times\frac{40}{\pi^2}\right)=200\pi+\frac{800}{\pi}$가 된다.





(b) (a)를 일반화하라는 문제다. 밑면의 반지름을 r, 높이를 h라고 한다면 부피가 4000인 것에서 $4000=\pi r^2\times h$가 성립하고 이것을 h에 대해서 풀면 $h=\frac{4000}{\pi r^2}$이 된다. 또한 직원기둥의 겉넓이를 S라고 하면

$$
\begin{aligned}
S &= \left(2\times\pi r^2\right)+\left(2\pi r\times h\right)\\
&= \left(2\times\pi r^2\right)+\left(2\pi r\times\frac{4000}{\pi r^2}\right)\\
&= 2\pi r^2+\frac{8000}{r}
\end{aligned}
$$

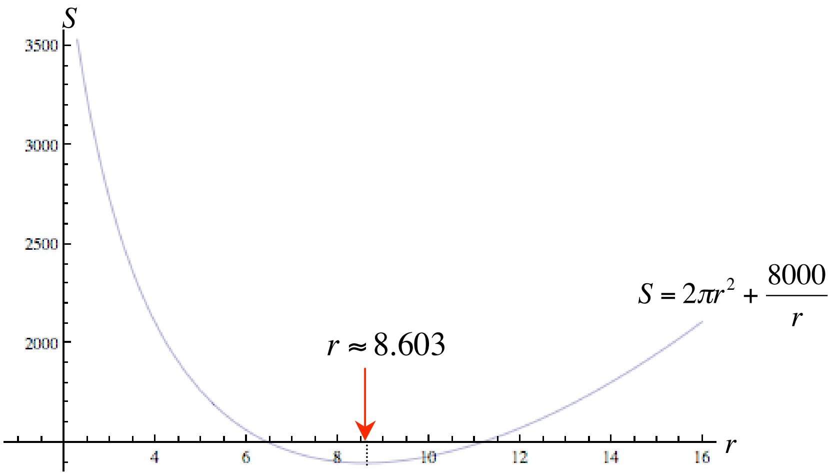
이 된다.

(c) S가 최소가 되게 는하 반지름 r 를구하는 문제다. 미분을 이용하면 쉽게 구할 수 있다. 여기서는 몫의 미분법을 사용한다.

S를 r에 대하여 미분하면 $\frac{dS}{dr} = 4\pi r - \frac{8000}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 8000}{r^2}$이 되고 이것이 0이 되는 곳에서 극소이자 최소를 갖게 된다. $\frac{dS}{dr} = 0$ 에서

$r = \left(\frac{2000}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 8.603$이 되고, 이 값을 중심으로 S'의 부호가 −에서 +로 바뀌므로 극소이자 최소가 된다. 결국 $r \approx 8.603$ 으로 할 때가 캔의 겉넓이를 최소로 할 수 있다.

실제로 $S = 2\pi r^2 + \frac{8000}{r}$의 그래프를 그려보면 아래와 같고, 그래프에서도 $r \approx 8.603\ \mathrm{cm}$에서 최소가 되는 것을 확인할 수 있다.



따라서 이 때의 높이는 $h = \frac{4000}{\pi r^2} = \frac{4000}{\pi (8.603)^2} \approx 17.203\ cm$ 이 된다.