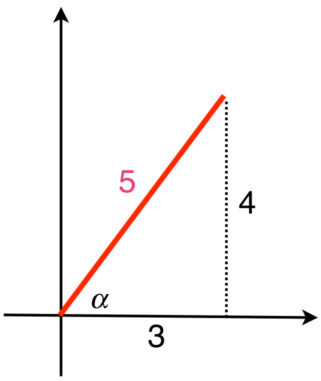
Phillips Exeter Academy - Mathematics 4C - page 9 - problem 3, 7

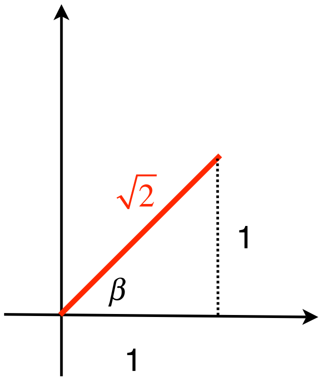
3. Write 3+4*i* and 1 + *i* in polar form. Then calculate the product of 3 + 4*i* and 1 + *i*, and write this complex number in polar form as well. Do you notice anything remarkable?

아래 그림을 참고하면 쉽게 극형식으로 변환할 수가 있습니다.

$3+4i = 5(\cos\alpha + i\sin\alpha) = 5cis\alpha$, $\quad \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = \arctan\left(\frac{4}{3}\right)$

$1+i = \sqrt{2}(\cos\beta + i\sin\beta) = \sqrt{2}cis\beta$, $\quad \beta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$





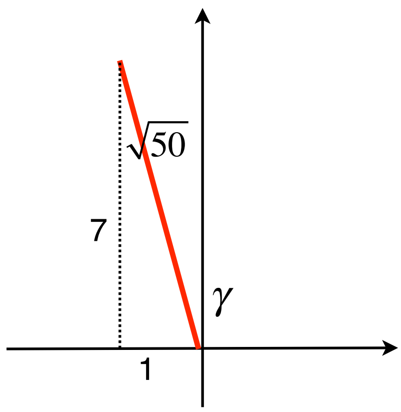
또한 $(3+4i)\times(1+i) = 3+3i+4i-4 = -1+7i$ 이고 되고, 아래 그림에서 $\sqrt{50} = 5\times\sqrt{2}$ 인것을 확인할 수 있습니다. 게다가

$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = \arctan\left(\frac{4}{3}\right) = 0.9273$

$\beta = \tan^{-1}(1) = \arctan(1) = 0.7854$

$\gamma = \tan^{-1}\left(\frac{7}{-1}\right) = \arctan(-7) = 1.7127$

가 되어 $\alpha + \beta = \gamma$ 됨을 확인할 수 있습니다.



일반적으로 다음이 성립합니다.

$r_1 cis\theta_1 \times r_2 cis\theta_2 = r_1 r_2 cis(\theta_1 + \theta_2)$

* 위의 공식을 이용하여 삼각함수 덧셈정리를 증명할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
& r_1\left(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1\right)\times r_2\left(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2\right) \\
&= r_1 r_2\left(\cos\theta_1\cos\theta_2 + i\cos\theta_1\sin\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2\right) \\
&= r_1 r_2\left\{\left(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2\right) + i\left(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2\right)\right\} \\
&= r_1 r_2\left\{\cos\left(\theta_1+\theta_2\right) + i\sin\left(\theta_1+\theta_2\right)\right\}
\end{aligned}
$$

7. The product of the complex numbers cis(35) and cis(21) can itself be written in the form cis θ. What is θ? What is the product of 4 cis(35) and 3 cis(21)?

3번 문제에 따르면 $\theta = 35 + 21 = 56$ 이 된다.

따라서 $4cis(35)\times 3cis(21) = 12cis(56)$ 이 된다.