

부분적분법

두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 곱 $f(x)g(x)$ 를 미분하면

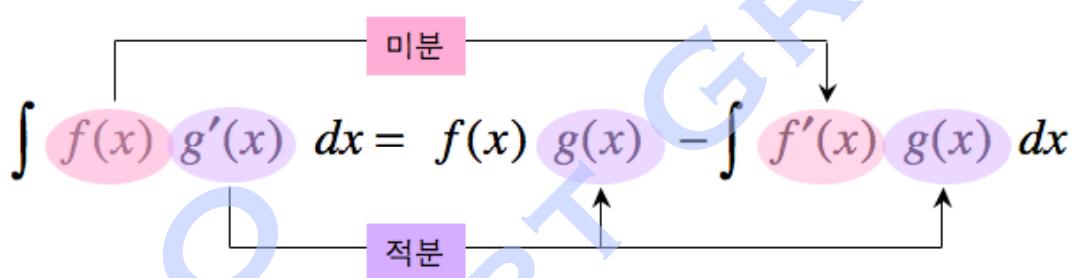
$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

양변을 x 에 대하여 적분하면

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \int \{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\} dx \\ &= \int f'(x)g(x) dx + \int f(x)g'(x) dx \end{aligned}$$

$$\therefore \int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$$

이와 같은 공식을 이용하여 적분하는 방법을 부분적분법이라고 한다.



부분적분법에서는 우변의 $\int f'(x)g(x) dx$ 가 쉽게 적분되도록 $f(x), g'(x)$ 를 정해야 한다. $g'(x)$ 가 될 가능성이 높은 순서대로 함수들을 나열하면 다음과 같다.

지수함수 > 삼각함수 > 다항함수 > 로그함수

즉, 지수함수와 다항함수가 곱해져 있는 경우, $f(x)$ 로는 다항함수를 $g'(x)$ 로는 지수함수를 선택하여야 한다.

다음 부정적분을 구하여라.

$$(1) \int x \cos x \, dx$$

$$(2) \int xe^x \, dx$$

$$(3) \int \ln(x+1) \, dx$$

피적분함수가 두 함수의 곱의 꼴로 되어 있으면 부분적분법을 이용한다.

(1) 삼각함수 > 다항함수 이므로 $f(x) = x$, $g'(x) = \cos x$ 로 놓으면
 $f'(x) = 1$, $g(x) = \sin x$

$$\therefore \int x \cos x \, dx = x \sin x - \int 1 \cdot \sin x \, dx = x \sin x + \cos x + C$$

(2) 지수함수 > 다항함수이므로 $f(x) = x$, $g'(x) = e^x$ 로 놓으면
 $f'(x) = 1$, $g(x) = e^x$

$$\therefore \int xe^x \, dx = xe^x - \int 1 \cdot e^x \, dx = xe^x - e^x + C$$

(3) $\ln(x+1) = 1 \cdot \ln(x+1)$ 이고 다항함수 > 로그함수 이므로

$$f(x) = \ln(x+1), g'(x) = 1 \text{로 놓으면 } f'(x) = \frac{1}{x+1}, g(x) = x$$

$$\begin{aligned} \therefore \int \ln(x+1) \, dx &= \ln(x+1) \cdot x - \int \frac{1}{x+1} \cdot x \, dx \\ &= x \ln(x+1) - \int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx \\ &= x \ln(x+1) - x + \ln(x+1) + C \end{aligned}$$

C 는 모두 상수