# 부분적분법

두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 곱 $f(x)g(x)$ 를 미분하면

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

양변을 $x$ 에 대하여 적분하면

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \int \{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\}dx \\ &= \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx \end{aligned}$$

$$\therefore \int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

이와 같은 공식을 이용하여 적분하는 방법을 부분적분법이라고 한다.

미분

$$\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx$$

적분

부분적분법에서는 우변의 $\int f'(x)g(x)\,dx$ 가 쉽게 적분되도록 $f(x)$, $g'(x)$ 를 정해야 한다. $g'(x)$ 가 될 가능성이 높은 순서대로 함수들을 나열하면 다음과 같다.

지수함수 > 삼각함수 > 다항함수 > 로그함수

즉, 지수함수와 다항함수가 곱해져 있는 경우, $f(x)$ 로는 다항함수를 $g'(x)$ 로는 지수함수를 선택하여야 한다.

다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int x\cos x\,dx$ (2) $\int xe^{x}dx$

(3) $\int \ln(x+1)dx$

피적분함수가 두 함수의 곱의 꼴로 되어 있으면 부분적분법을 이용한다.

(1) 삼각함수 > 다항함수 이므로 $f(x)=x,\ g'(x)=\cos x$ 로 놓으면

$f'(x)=1,\ g(x)=\sin x$

$$\therefore \int x\cos x\,dx = x\sin x - \int 1\cdot\sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C$$

(2) 지수함수 > 다항함수이므로 $f(x)=x,\ g'(x)=e^{x}$ 로 놓으면

$f'(x)=1,\ g(x)=e^{x}$

$$\therefore \int xe^{x}\,dx = xe^{x} - \int 1\cdot e^{x}\,dx = xe^{x} - e^{x} + C$$

(3) $\ln(x+1)=1\cdot\ln(x+1)$ 이고 다항함수 > 로그함수 이므로

$f(x)=\ln(x+1),\ g'(x)=1$ 로 놓으면 $f'(x)=\dfrac{1}{x+1},\ g(x)=x$

$$\begin{aligned}\therefore \int \ln(x+1)\,dx &= \ln(x+1)\cdot x - \int \frac{1}{x+1}\cdot x\,dx \\ &= x\ln(x+1) - \int\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx \\ &= x\ln(x+1) - x + \ln(x+1) + C\end{aligned}$$

$C$ 는 모두 상수