여러 가지 미분법

(1) 곱의 미분

두 함수 f, g가 모두 미분 가능할 때

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\begin{aligned}
\{f(x)g(x)\}' &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\left[g(x+h)\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right\}+f(x)\left\{\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\}\right] \\
&= \lim_{h\to 0}g(x+h)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}g(x+h)\times\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+f(x)\times\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= g(x)f'(x)+f(x)g'(x)
\end{aligned}$$

(2) 합성함수의 미분 – 연쇄법칙(chain rule)

두 함수 f, g가 모두 미분 가능하고 함수 $F = f\circ g$가 $F(x) = f\{g(x)\}$로 정의되는 합성함수일 때

$$F'(x) = f'\{g(x)\}\cdot g'(x)$$

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f\{g(x+h)\}-f\{g(x)\}}{h}$$

여기서 $g(x+h)-g(x) = \Delta u$라고 하면 $g(x+h) = \Delta u + g(x)$이고

$h\to 0$일 때 $\Delta u \to 0$이므로

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f\{g(x)+\Delta u\}-f\{g(x)\}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f\{g(x)+\Delta u\}-f\{g(x)\}}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{h} \\
&= \lim_{\Delta u\to 0}\frac{f\{g(x)+\Delta u\}-f\{g(x)\}}{\Delta u}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= f'\{g(x)\}g'(x)
\end{aligned}$$

(3) 몫의 미분

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \left\{f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right\}' = f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)} + f(x)\cdot\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}'$$
$$= \frac{f'(x)}{g(x)} + f(x)\cdot\left[-\frac{1}{\{g(x)\}^2}\cdot g'(x)\right] = \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$
$$= \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

* 합성함수의 미분법$\left(\frac{d}{dx}\{f(x)\}^n = n\{f(x)\}^{n-1}f'(x)\right)$을 사용하면

$$\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}' = \left[\{g(x)\}^{-1}\right]' = -\{g(x)\}^{-2}\cdot g'(x) = -\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

이 된다.

(4) 음함수의 미분

음함수 $f(x,\ y)=0$ 에 대해 y가 x에 대하여 미분가능한 함수일 때, 다음과 같이 도함수를 구할 수 있다.

① $f(x,\ y)$를 x에 대하여 미분한다.

② y를 x의 함수로 가정하고, 연쇄법칙(chain rule)을 적용한다.

③ $\frac{dy}{dx}$에 관하여 푼다.

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}, \qquad \frac{d}{dx}y^n = ny^{n-1}\frac{dy}{dx}$$

같은 변수　　　다른 변수

다음 함수를 x에 대하여 미분하여라.

(1) $y=(x+3)\sqrt{x-2}$ (2) $y=\cos^3 x\cdot\sin 3x$

(1) $y'=(x+3)'\sqrt{x-2}+(x+3)\left(\sqrt{x-2}\right)'=1\cdot\sqrt{x-2}+(x+3)\frac{1}{2\sqrt{x-2}}(x-2)'$

$$\sqrt{x-2}+(x+3)\frac{1}{2\sqrt{x-2}}\cdot 1=\frac{2(x-2)+(x+3)}{2\sqrt{x-2}}=\frac{3x-1}{2\sqrt{x-2}}$$

(2) $y'=\left(\cos^3 x\right)'\sin 3x+\cos^3 x(\sin 3x)'$

$$=3\cos^2 x(\cos x)'\sin 3x+\cos^3 x\cos 3x\cdot(3x)'$$
$$=3\cos^2 x(-\sin x)\sin 3x+\cos^3 x\cos 3x\cdot 3$$
$$=3\cos^2 x(-\sin x\sin 3x+\cos x\cos 3x)$$
$$=3\cos^2 x\cos 4x$$

다음 함수에 대하여 $\frac{dy}{dx}$를 구하여라.

(1) $y^3=3x^2$ (2) $\frac{y}{x+y}=x^3-1$ (3) $\sin(x+y)=y\cos x$

(1) 양변을 x에 대하여 미분하면 $\frac{d}{dx}\left(y^3\right)=\frac{d}{dx}\left(3x^2\right)$

$3y^2\frac{dy}{dx}=6x$ $\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{2x}{y^2}$ (단, $y\neq 0$)

(2) 양변을 x에 대하여 미분하면 $\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x+y}\right)=\frac{d}{dx}\left(x^3-1\right)$

$$\frac{\left\{\frac{d}{dx}(y)\right\}(x+y)-y\frac{d}{dx}(x+y)}{(x+y)^2}=3x^2$$

$$\frac{1\cdot\frac{dy}{dx}(x+y)-y\left(1+1\cdot\frac{dy}{dx}\right)}{(x+y)^2}=3x^2$$

$\therefore \frac{dy}{dx}=3x(x+y)^2+\frac{y}{x}$ (단, $x\neq 0$)

(3) 양변을 x에 대하여 미분하면 $\frac{d}{dx}\left\{\sin(x+y)\right\}=\frac{d}{dx}(y\cos x)$

$$\cos(x+y)\frac{d}{dx}(x+y)=\left(\frac{d}{dx}y\right)\cos x+y\left(\frac{d}{dx}\cos x\right)$$

$$\cos(x+y)\left(1+1\cdot\frac{dy}{dx}\right)=1\cdot\frac{dy}{dx}\cos x+y(-\sin x)$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{y\sin x+\cos(x+y)}{\cos x-\cos(x+y)}\qquad (\text{단, } \cos x\neq\cos(x+y))$$