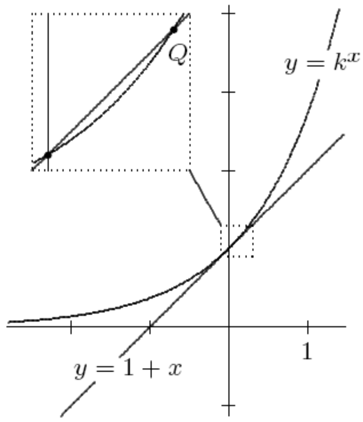
Phillips Exeter Academy - Mathematics 4C – page 9 – problem 8



The slope of the curve $y = 2^x$ at its y-intercept is slightly less that 0.7, while the slope of the curve $y = 3^x$ at its y-intercept is nearly 1.1. This suggests that there is a number b for which the slope of the curve $y = b^x$ is exactly 1 at its y-intercept. The figure shows the line $y = 1 + x$, along with the graph of $y = k^x$, where k is slightly smaller than the special number b. The curve crosses the line at (0, 1) and (as the magnified view shows) at another point Q nearby in the first quadrant. Given the x-coordinate of Q, it is possible to calculate k by just solving the equation $k^x = 1 + x$ for k. Do so when $x = 0.1$, when $x = 0.01$, and when $x = \frac{1}{n}$. The last answer expresses k in terms of n; evaluate the limit of this expression as n approaches infinity, and deduce the value of b. What happens to Q as n approaches infinity?

한국의 교과과정 중 “미분과 적분” 에서 “자연상수 e의 정의”에 해당하는 부분이다. 그래프와 극한을 이용하여 자연스럽게 자연상수 e를 유도하고 있다.

$y = k^x$의 y 절편은 항상 (0, 1)이 된다. 이 점에서의 접선의 기울기가 1이 되는 직선의 방정식은 $y = 1 + x$이 되고, 방정식 $k^x = 1 + x$ 로부터 (0, 1)에서의 접선의 기울기가 1이 되는 지수함수의 밑 k를 찾고자 하는 것이다.
지수 법칙으로 부터 다음이 성립한다

$$k^x = 1 + x \quad \Leftrightarrow \quad k = (1 + x)^{\frac{1}{x}} .$$

따라서 $x = 0.1$ 일 때, $k = (1 + 0.1)^{\frac{1}{0.1}} = \left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10} \approx 2.59374$ 이고,

$x = 0.01$ 일 때, $k = (1 + 0.01)^{\frac{1}{0.01}} = \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} \approx 2.70481$이다.

일반적으로 $x = \frac{1}{n}$ 일 때, $k = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 이 된다.
n의 값이 점점 커질 경우 k 값의 변화를 보면 다음의 표와 같다.

n	k
1	2
10	2.59374246
100	2.704813829
1000	2.716923932
10000	2.718145927
100000	2.718268237
1000000	2.718280469
10000000	2.718281694
100000000	2.718281786

위의 표에서 보는 바와 같이 n의 값이 점점 커지면 k값은 2.7183에 가까워짐을 알 수 있다. 즉, $\lim_{n \to \infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx 2.7183$이고 이 값을 우리는 자연상수 “e”라고 정의한다.

n값이 커지게 되면 점 Q의 x좌표는 0에 가까워지고 이것은 함수 $f(x)=e^x$에서 y절편 (0, 1)과 점 $Q\left(\frac{1}{n},\ e^{\frac{1}{n}}\right)$ 사이의 기울기, 즉 평균변화율이 n이 증가함에 따라 $x=0$에서의 접선의 기울기 즉, $f'(1)$이 됨을 의미한다.

결론적으로 $y=e^x$의 $x=0$에서의 접선의 기울기는 1이 된다.