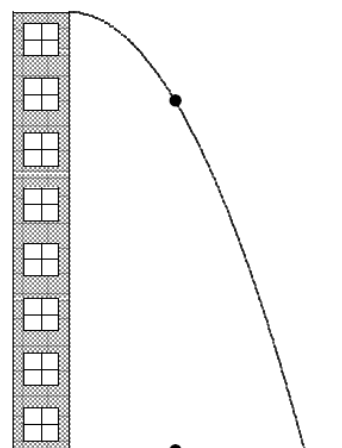


6. After being thrown from the top of a tall building, a projectile follows the path $(x, y) = (60t, 784 - 16t^2)$, where x and y are in feet and t is in seconds. The Sun is directly overhead, so that the projectile casts a moving shadow on the ground beneath it, as shown in the figure. When $t = 1$,



- (a) how fast is the shadow moving?
- (b) how fast is the projectile losing altitude?
- (c) how fast is the projectile moving?

낙하하는 물체의 운동이 매개변수 방정식 $x(t) = 60t$, $y(t) = 784 - 16t^2$ 으로 주어진 것과 같다. 따라서 물체의 그림자의 운동은 $x(t) = 60t$ 로 나타낼 수 있으며, 물체 높이의 변화(고도의 변화)는 $y(t) = 784 - 16t^2$ 로 나타낼 수 있다.

- (a) $x(t) = 60t$ 에서 물체는 수평방향으로 1초에 60피트씩 움직이는 것을 알 수 있다. 따라서 물체의 그림자의 속력 60 ft/s 가 된다.
- (b) $y(t) = 784 - 16t^2$ 로 부터 건물의 높이는 784피트인것을 알 수 있고, $-16t^2$ 항으로부터 시간의 제곱에 비례(16배)하여 높이가 감소하는 것을 알 수 있다.

물리(Physics)에서 배운 바에 의하면 수직선 위를 움직이는 물체의 시간 t 에서의 변위와 속도는 다음과 같이 주어진다.

$$S = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2, \quad v_t = v_0 + a t \quad (v_0 \text{는 초기 속도, } a \text{는 가속도})$$

문제의 상황에서 $v_0 = 0$ 이므로 $\frac{1}{2} a t^2 = -16t^2$ 으로 부터 $a = -32 \text{ ft/s}^2$ 이고

$v_t = -32t$ 가 된다.

- (c) 물체의 속력은 수평방향의 속력과 수직 방향의 속력을 합하여 나타내야 한다.

벡터에서 배운바에 의하면 물체의 속력 v 는 $v = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2}$ (v_x 는 수평방향 속력, v_y 는 수직방향 속력)으로 나타내므로 떨어지는 물체의 속력은 $v = \sqrt{(60)^2 + (-32t)^2}$ 로 나타낼 수 있다.

이 문제는 아직 미분의 개념을 모르기 때문에 위와 같이 풀이하기로 한다.

7. (Continuation) What is the altitude of the projectile when $t = 2$? What is the altitude of the projectile a little later, when $t = 2+k$? How much altitude is lost during this k -second interval? At what rate is the projectile losing altitude during this interval?
-

$t = 2$ 에서의 물체의 높이는 $784 - 16(2)^2 = 784 - 64 = 720$ 피트가 됨을 알 수 있다.

$t = 2+k$ 에서의 물체의 높이는

$$784 - 16(2+k)^2 = 784 - 16(4 + 4k + k^2) = -16k^2 - 64k + 720 \text{ 피트가 된다.}$$

결국 k 초 동안 물체가 떨어진 거리는 $720 - (-16k^2 - 64k + 720) = 16k^2 + 64k$ 가 된다.

결국 $t = 2$ 에서부터 $t = 2+k$ 사이에서는 평균적으로 1초동안

$$\frac{16k^2 + 64k}{k} = 16k + 64 \text{ 만큼 고도가 감소했다고 말할 수 있다.}$$

8. (Continuation) Evaluate $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{y(2+k) - y(2)}{k}$, recalling that $y(t) = 784 - 16t^2$ is the altitude of the projectile at time t . What is the meaning of this limiting value in the story?
-

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{y(2+k) - y(2)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\{784 - 16(2+k)^2\} - \{784 - 16(2)^2\}}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} (-16k - 64) = -64$$

$\frac{y(2+k) - y(2)}{k}$ 은 $t = 2$ 에서부터 $t = 2+k$ 사이에서의 높이의 평균 변화량(즉, 평균 속도)이 되고, $k \rightarrow 0$ 이 되면 $t = 2$ 에서의 순간적인 변화량(즉, $t = 2$ 에서의 순간 속도)이 된다. 결국 $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{y(2+k) - y(2)}{k}$ 은 $t = 2$ 에서의 물체의 수직방향 속도가 된다.

이것이 결국 $t = 2$ 에서의 $y(t) = 784 - 16t^2$ 의 미분 계수가 된다.

9. (Continuation) At what angle does the projectile strike the ground?

$y(t) = 784 - 16t^2 = 0$ 에서 물체가 땅에 떨어지는 것은 $t=7$ 일 때다.
 $t=7$ 에서의 수평방향의 속도는 60, 수직 방향의 속력은

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow 0} \frac{y(7+k) - y(7)}{k} &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\{784 - 16(7+k)^2\} - \{784 - 16(7)^2\}}{k} \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{-16k^2 - 16 \times 14k}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} (-16k - 224) = -224\end{aligned}$$

이것을 벡터로 표현하면 다음과 같다.

두 속도 벡터의 합벡터의 크기는

$$\sqrt{(60)^2 + (-224)^2} \approx 232 \text{이고 그림에서}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{60}{232}\right) \approx 75^\circ \text{가 된다.}$$

즉, 물체는 지면과 약 75° 의 각도를 이루며 땅에 떨어진다고 할 수 있다.

