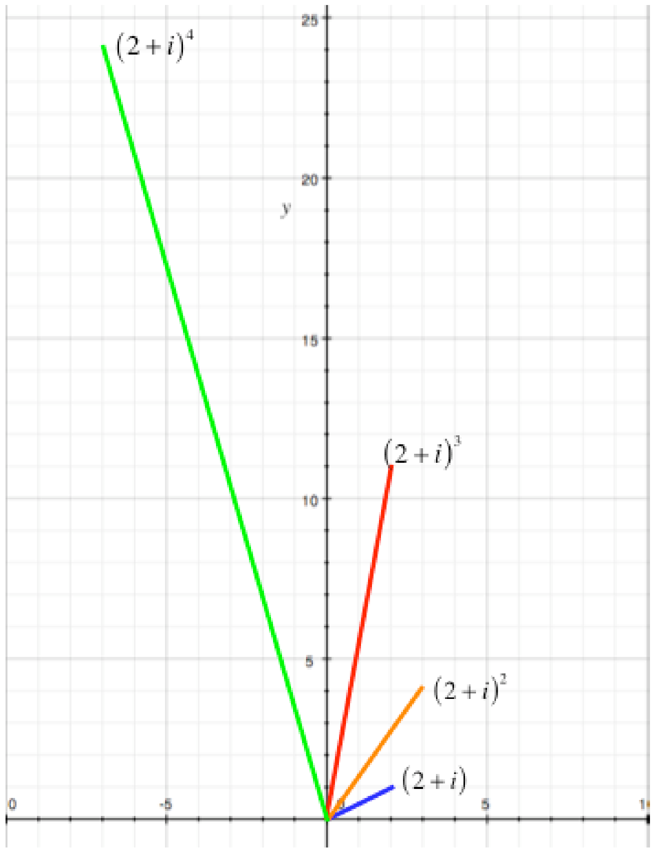
Phillips Exeter Academy - Mathematics 4C - Page 11 - Problem 3~4

3. Write $(2+i)^2$, $(2+i)^3$ and $(2+i)^4$ in *a*+*bi* form. Graph these three complex numbers along with 2+*i*. Now write all four numbers in polar form. What patterns do you notice?

$(2+i)^2 = 4+4i-1 = 3+4i$

$(2+i)^3 = (2+i)^2(2+i) = (3+4i)(2+i) = 2+11i$

$(2+i)^4 = (2+i)^3(2+i) = (2+11i)(2+i) = -7+24i$



$$(2+i) \Rightarrow \sqrt{2^2+1^2}(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \sqrt{5}\text{cis}\alpha, \quad \alpha = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) = 0.4636\ (rad)$$

$$(2+i)^2 \Rightarrow \sqrt{3^2+4^2}(\cos\beta + i\sin\beta) = 5\text{cis}\beta, \quad \beta = \arctan\left(\frac{4}{3}\right) = 0.9273\ (rad)$$

$$(2+i)^3 \Rightarrow \sqrt{2^2+11^2}(\cos\gamma + i\sin\gamma) = 5\sqrt{5}\text{cis}\gamma, \quad \gamma = \arctan\left(\frac{11}{2}\right) = 1.3909\ (rad)$$

$$(2+i)^4 \Rightarrow \sqrt{(-7)^2+24^2}(\cos\delta + i\sin\delta) = 25\text{cis}\delta, \quad \delta = \arctan\left(\frac{24}{-7}\right) = 1.8546\ (rad)$$

복소수 $(2+i)$ 의 거듭제곱들의 위치와 극형식들이 나타내는 것을 보면 두 가지 특징을 발견할 수 있다. 첫 째, 원점에서부터의 거리가 $\sqrt{5} \to 5 \to 5\sqrt{5} \to 25$ 로 $\sqrt{5}$ 배씩 증가함을 볼 수있다. 또한 실수축의 양의 방향으로부터의 편각이 $\beta = 2\alpha, \quad \gamma = 3\alpha, \quad \delta = 4\alpha$ 로 늘어나는 것을 볼 수 있다.

4. A truly remarkable property of complex multiplication is the angle-addition identity $\mathrm{cis}(\alpha)\mathrm{cis}(\beta) = \mathrm{cis}(\alpha + \beta)$. Use it to derive the *theorem of De Moivre*, which says that $(r\mathrm{cis}\theta)^n = r^n\mathrm{cis}(n\theta)$ for any numbers r and θ, and any integer n. Calculate $\left(\sqrt{3}+i\right)^{18}$.

수학적 귀납법을 이용하여 증명해보자.
$n=1$ 인 경우 $(r\mathrm{cis}\theta)^1 = r^1\mathrm{cis}(1\times\theta) = r\mathrm{cis}\theta$ 임으로 성립한다.
$n=k$ 일 때, $(r\mathrm{cis}\theta)^k = r^k\mathrm{cis}(k\theta)$ 가 성립한다고 가정하자.

$(r\mathrm{cis}\theta)^k$ 에 $r\mathrm{cis}\theta$ 를 곱하면
$(r\mathrm{cis}\theta)^k \times r\mathrm{cis}\theta = r^k\mathrm{cis}(k\theta)\times r\mathrm{cis}\theta = r^{k+1}\mathrm{cis}(k\theta+\theta) = r^{k+1}\mathrm{cis}\{(k+1)\theta\}$
이므로 $n=k+1$ 일 때도 성립한다.

따라서 $(r\mathrm{cis}\theta)^n = r^n\mathrm{cis}(n\theta)$ 가 성립한다.

이 결과를 이용하면
$\left(\sqrt{3}+i\right)^{18} = \left(2\mathrm{cis}\dfrac{\pi}{6}\right)^{18} = 2^{18}\mathrm{cis}\left(18\times\dfrac{\pi}{6}\right) = 2^{18}\mathrm{cis}3\pi = -2^{18}$
로 계산할 수 있다.