

3. The natural exponential function e^x is one of the most important functions in mathematics. It is sometimes given the special name exp, meaning that $\exp(x) = e^x$.

(a) Evaluate the expressions $\exp(0.5)$, $\exp(\ln x)$, and $\ln(\exp t)$.

(b) Recall that the slope of the curve $y = \exp x$ at its y-intercept is 1. Use this information to find the slopes of the curves $y = \exp 2x$ and $y = \exp mx$ at their y-intercepts.

(a) * $\exp(0.5) = e^{\frac{1}{2}} \approx 1.6487$

* $\exp(\ln x) = e^{\ln x} = k$ 라고 하고 양변에 자연로그를 취하면

$$\ln(e^{\ln x}) = \ln k$$

$$(\ln x) \times (\ln e) = \ln k$$

$$\ln x = \ln k \quad (\because \ln e = 1)$$

$$\therefore x = k$$

* $\ln(\exp t) = \ln(e^t) = t \ln e = t$

(b) e^{2x} 도 (0, 1)을 지나므로 이 점에서의 접선의 기울기는 $e^{2x} = kx + 1$ 에서

$x = 0.1, 0.01, \dots, \frac{1}{n} \ (n \rightarrow \infty)$ 를 대입하면서 k 값을 찾아가면 된다.

$e^{2x} = kx + 1$ 를 k 에 대하여 풀면 $k = \frac{e^{2x} - 1}{x}$ 이 되고, 여기에 $x = \frac{1}{n}$ 을 대입하며 극한을 취

하면 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{2}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x}$ 가 된다. 여기서 $\frac{e^{2x} - 1}{2x}$ 을 함수 $f(x) = e^{2x}$ 에서 두

점 $(2x, f(2x))$, $(0, 1)$ 을 잇는 직선의 기울기라고 한다면 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x}$ 은 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$ 와 같아지

고 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ 이란 것을 알고 있기 때문에 쉽게 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{2}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x} = 2$

라는 것을 알 수 있다. $y = \exp mx = e^{mx}$ 의 경우도 유사한 방법으로 접근하면 $e^{mx} = kx + 1$ 로

부터 $k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{m}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{mx} - 1}{x} = m \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{mx} - 1}{mx} = m$ 이 됨을 알 수 있다.

4. (Continuation) Justify the identity $2^x = e^{x \ln 2}$. Apply this equality to the problem of finding the slope of the curve $y = 2^x$ at its y -intercept.

3번 문제에서 $y = \exp mx = e^{mx}$ 의 y 절편에서의 접선의 기울기가 m 이 된다는 것을 알았기 때문에 이 문제는 간단하게 해결된다. $y = 2^x = e^{x \ln 2}$ 의 y 절편에서의 접선의 기울기는 $\ln 2$ 가 된다.