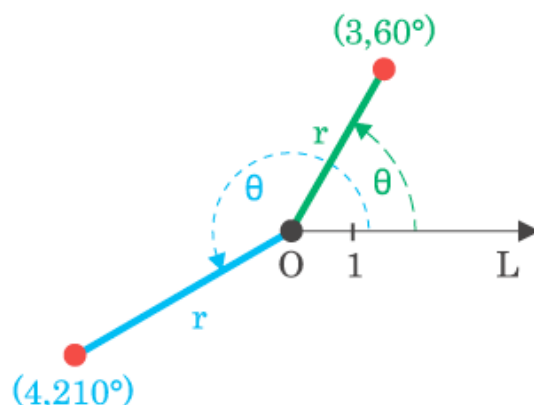


Phillips Exeter Academy – Mathematics 4C – Page 17 – Problem 3

A circular disk, whose radius is 6 inches, is spinning at 10 rpm. Crawling at a steady rate, a bug makes the 6-inch journey from the center of the disk to the rim in one minute. Find an equation, in polar coordinates, for the Archimedean spiral traced by the bug.

극좌표에서는 오른쪽 그림과 같이
원점으로부터의 거리 r 와 편각 θ 를
이용하여 (r, θ) 로 점을 정의한다.
위 문제에서 곤충의 시간에 따른 움직임을
극좌표로 표현하기 위해서는 출발점인
disk의 중심으로부터 곤충까지의 거리와
편각 θ 를 시간 t 에 대한 함수로 표현해야
한다.



문제에서 disk가 분당 10바퀴 (10 Revolution Per Minute)를 돈다고 하였으므로, 이것을
각도(라디안)로 나타낸다면 $20\pi t$ (t 는 시간, 단위는 분)가 된다. 또한 곤충이 디스크의
중심으로부터 가장자리까지 도달하는데 1분이 걸리고 디스크의 반지름이 6인치
이므로 시간 t 에서의 디스크의 중심으로 부터 곤충까지의 거리는 $6t$ 가 된다.
이것을 이용하여 (r, θ) 를 나타내면 $(6t, 20\pi t)$ 이 되고 다음이 성립한다.

$$\left. \begin{array}{l} r = 6t \\ \theta = 20\pi t \end{array} \right\} \quad r = 6 \times \frac{\theta}{20\pi} = \frac{3\theta}{10\pi}$$

극좌표계에서 $r = \frac{3\theta}{10\pi}$ 의 그래프를 그려보면 다음과 같다.

