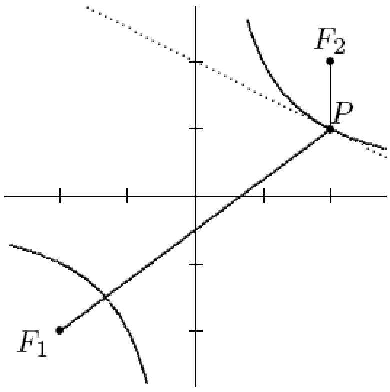
1. The point $P=(2,\ 1)$ is on the hyperbola $xy=2$. Find the slope of the line tangent to the curve at P. Start by letting Q be a point on the curve whose x-coordinate is 2+h, where h stands for a small number. Use algebra to calculate what happens to the slope of line PQ when h approaches zero.
2. (Continuation) The tangent line bisects the angle F_1PF_2 formed by the focal radii drawn from P to $F_1=(-2,\ -2)$ and $F_2=(-2,\ -2)$. Find a way to show this. There are several methods from which to choose.

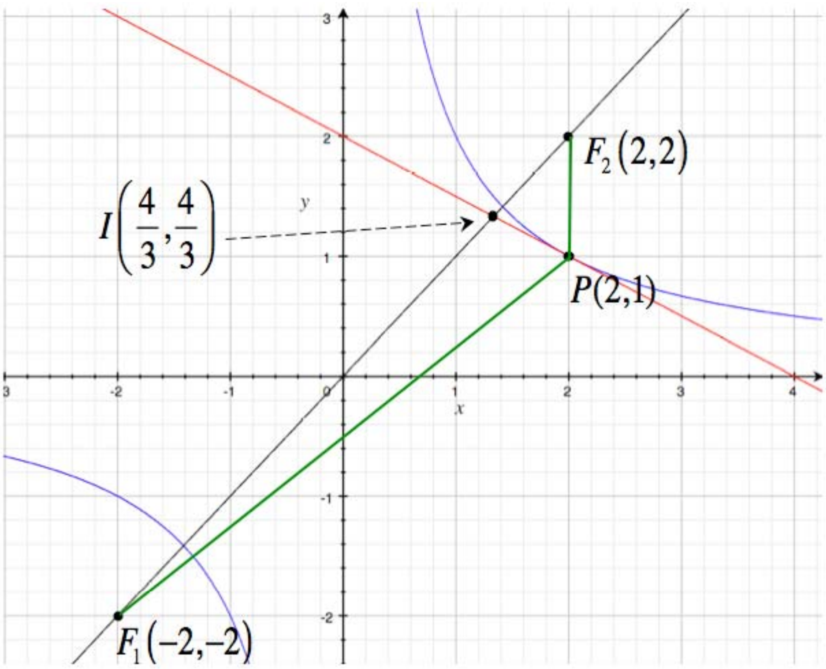


---

1. 두 점 $P(2,\ 1)$, $Q\left(2+h,\ \dfrac{2}{2+h}\right)$를 잇는 직선의 기울기는

$$\frac{\dfrac{2}{2+h}-1}{(2+h)-2}=\frac{-h}{h(2+h)}=\frac{-1}{2+h}$$ 와 같고, $h\to 0$ 이라면 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-1}{2+h}=-\dfrac{1}{2}$ 이 됨을 알 수 있다.

2. 따라서 점 P에서의 접선의 방정식은 $y=-\dfrac{1}{2}(x-2)+1=-\dfrac{1}{2}x+2$ 이 되고, 두 점 $F_1(-2,\ -2)$, $F_2(-2,\ -2)$를 잇는 직선의 방정식은 $y=x$가 된다.



위의 그림에서처럼 두 직선 $y=-\frac{1}{2}x+2$ 와 $y=x$ 의 교점을 $I\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$ 라고 하면

$\overline{PF_1}=5,\quad \overline{PF_2}=1,\quad \overline{IF_1}=\frac{10\sqrt{2}}{3},\quad \overline{IF_2}=\frac{2\sqrt{2}}{3},\quad \overline{PI}=\frac{\sqrt{5}}{3}$ 이 되고 다음이 성립한다.

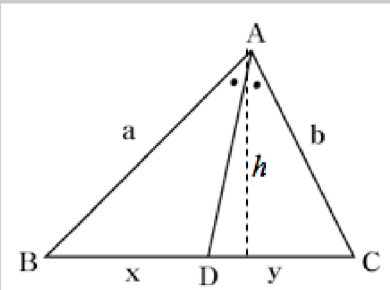
$$\overline{PF_1} : \overline{PF_2} = \overline{IF_1} : \overline{IF_2}$$

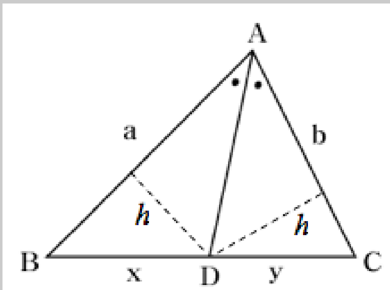
삼각형 각의 이등분선 정리에 의하여 $\angle F_1PI=\angle F_2PI$ 임을 알 수 있다.

각의 이등분선 정리

삼각형 ABC 에서 각 A를 이등분하는 직선이 변 BC와 만나는 점을 D라고 하면 $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$ 가 성립한다.

증명)
아래 왼쪽 그림에서 $\triangle ADB : \triangle ADC = x:y$ (두 삼각형의 높이 h가 같기 때문)
아래 오른쪽 그림에서 $\triangle ADB : \triangle ADC = a:b$
(두 삼각형이 합동이므로 높이 h가 같기 때문)





또 다른 방법으로는 코사인 제 2 법칙을 이용할 수 있다.
$\angle F_1PI=\alpha,\quad \angle F_2PI=\beta$ 라고 하면 코사인 제 2법칙에 의하여

$$\cos\alpha=\frac{(5)^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2-\left(\frac{10\sqrt{2}}{3}\right)^2}{2\times5\times\frac{\sqrt{5}}{3}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\cos\beta=\frac{(1)^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2-\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2}{2\times1\times\frac{\sqrt{5}}{3}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

에서 $\cos\alpha=\cos\beta$가 성립하고 $\alpha,\ \beta$가 모두 예각이므로 $\alpha=\beta$가 된다.

이밖에 싸인 법칙을 이용할 수 있다. 각자 생각해보도록 하자.