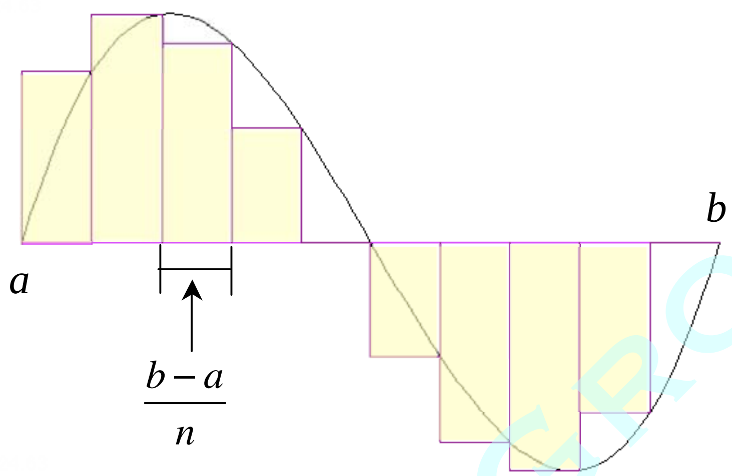
리만합 (Riemann Sum)

아래 그림과 같이 구간 $[a,\, b]$를 일정한 간격 $\dfrac{b-a}{n}$로 분할한 다음 $\dfrac{b-a}{n}$를 밑변으로 하고 높이가 $\left|f\left(a+\dfrac{b-a}{n}\cdot k\right)\right|$인 직사각형을 그려 넣으면 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a,\ \ x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이는 직사각형들의 넓이의 합으로 근사된다.

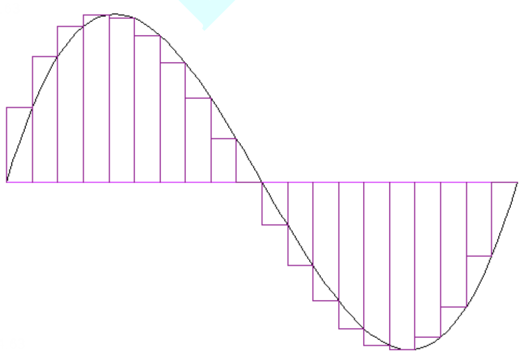


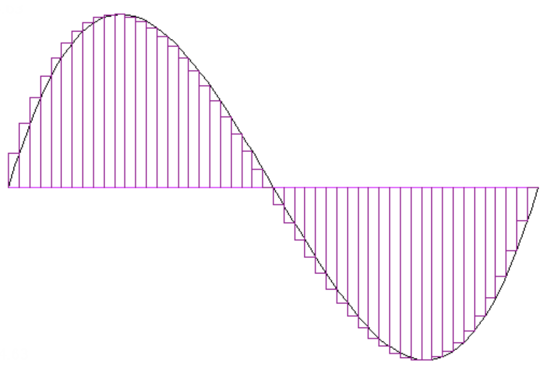
이 때, 직사각형들의 넓이의 합

$$\sum_{k=1}^{n}\left|f\left(a+\frac{b-a}{n}\cdot k\right)\right|\times\frac{b-a}{n}$$

를 리만합(Riemann sum)이라고 한다.

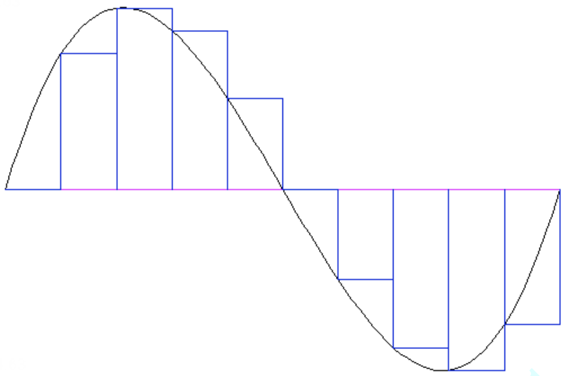
따라서 곡선과 축 사이의 넓이는 일정한 간격 $\dfrac{b-a}{n}$를 작게 할수록 보다 정확하게 구할 수 있다.



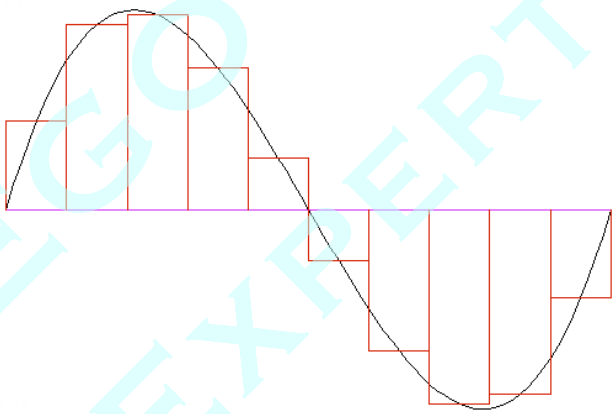


정적분의 정의에 의하면 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left|f\left(a+\frac{b-a}{n}\cdot k\right)\right|\times\frac{b-a}{n}=\int_a^b |f(x)|\,dx$ 이다.

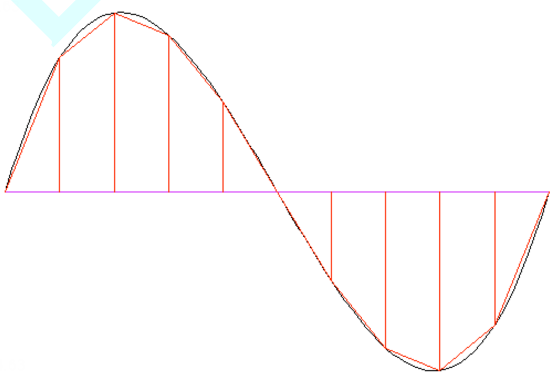
위의 예들을 자세히 살펴보면 막대들의 높이를 $\left|f\left(a+\frac{b-a}{n}\cdot k\right)\right|$, 즉 분할된 구간의 오른쪽 끝점에서의 함수값의 절대값으로 보고 있다. 그러나 항상 막대들의 높이를 이렇게 보는 것은 아니다. 분할된 구간의 왼쪽 끝점에서의 함수값의 절대값으로 볼 수도 있고, 분할된 구간의 중점에서의 함수값의 절대값으로 볼 수도 있다. 또한 직사각형이 아닌 사다리꼴을 이용하여 구할 수도 있다.



구간의 왼쪽 끝 함수값 이용



구간의 중점의 함수값 이용



사다리꼴을 이용

리만합을 이용하여 곡선 $y=-x^2+2x$ 와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

구간 $[0,\ 2]$를 n 개의 구간으로 나누면 $\Delta x=\dfrac{2-0}{n}=\dfrac{2}{n}$

$x_i=\dfrac{2i}{n}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$라고 정의하면 구하는 넓이 S는

$$S\approx\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{2i}{n}\right)\frac{2}{n}=\sum_{i=1}^{n}\left\{-\left(\frac{2i}{n}\right)^2+2\cdot\left(\frac{2i}{n}\right)\right\}\frac{2}{n}$$

$$=-\frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2+\frac{8}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i$$

$$=-\frac{8}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{8}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{-8n^3-12n^2-4n+12n^3+12n^2}{3n^3}=\frac{4n^3-4n}{3n^3}$$

$$\therefore S=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^3-4n}{3n^3}=\frac{4}{3}$$

참고로 정적분을 이용하면 $S=\int_0^2\left(-x^2+2x\right)dx=\left[-\dfrac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2=\dfrac{4}{3}$ 과 같다.