Expert Group
2008.02.02 Issue 4

AP Calculus

Topics:

- **Application of Integration**
  - **Area**
  - **Volume**
- **AP FRQ 기출문제**

새내기를 위한
대학수학기본서
P.180

넓이 (Area)

1) 곡선과 x 축 사이의 넓이

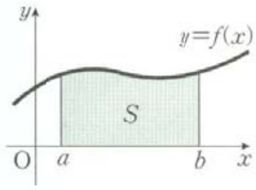
함수 $y=f(x)$가 폐구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S=\int_a^b |f(x)|\,dx$$

〈그림 1〉과 같이 폐구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)\geq 0$이면

$$S=\int_a^b f(x)\,dx$$

이고,

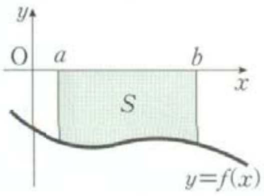


〈그림 1〉

〈그림 2〉와 같이 폐구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)<0$이면

$$S=-\int_a^b f(x)\,dx$$

이다.

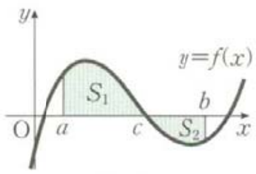


〈그림 2〉

〈그림 3〉과 같이 구간 $[a,\ c]$에서 $f(x)\geq 0$, 구간 $[c,\ b]$에서 $f(x)<0$이면

$$S=S_1+S_2=\int_a^c f(x)\,dx-\int_c^b f(x)\,dx$$

이다.



〈그림 3〉

2) 곡선과 y 축 사이의 넓이

함수 $f(y)$가 폐구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 곡선 $x=f(y)$와 y축 및 두 직선 $y=a$, $y=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S=\int_a^b |f(y)|\,dy$$

〈그림 1〉과 같이 폐구간 $[a,\ b]$에서 $f(y)\geq 0$이면

$$S=\int_a^b f(y)dy$$

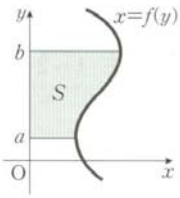
이고, 〈그림 2〉와 같이 폐구간 $[a,\ b]$에서 $f(y)<0$이면

$$S=-\int_a^b f(y)dy$$

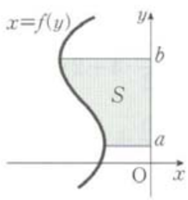
이다. 〈그림 3〉과 같이 구간 $[a, c]$에서는 $f(y)<0$, 구간 $[c,\ b]$에서는 $f(y)\geq 0$이면

$$S=S_1+S_2=-\int_a^c f(y)dy+\int_c^b f(y)dy$$

이다.



〈그림 1〉



〈그림 2〉

3) 두 곡선 사이의 넓이

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 폐구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(x)\geq g(x)$일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

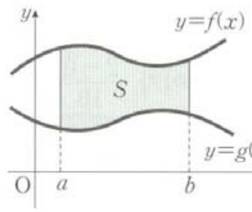
$$S=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$$

〈그림 1〉과 같이 $f(x)\geq g(x)\geq 0$인 경우 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이에서 곡선 $y=g(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이를 빼면 되므로

$$S=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$$

$$=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$$

이다.



〈그림 1〉

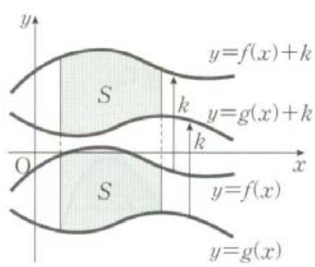
〈그림 2〉와 같이 $f(x)\geq g(x)$이지만 $f(x)$나 $g(x)$가 음의 값을 갖는 경우는 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$를 모두 y축의 양의 방향으로 $k(>0)$만큼 평행이동시켜 $f(x)+k\geq g(x)+k\geq 0$이 되도록 한 후 도형의 넓이를 구한다.

평행이동하여도 도형의 넓이는 변하지 않으므로

$$S=\int_a^b \{f(x)+k\}dx-\int_a^b \{g(x)+k\}dx$$

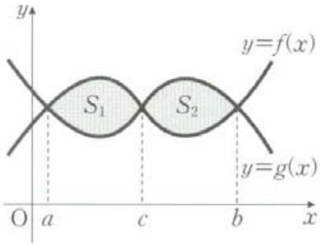
$$=\int_a^b \{f(x)+k-g(x)-k\}dx$$

$$=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$$



〈그림 2〉

〈그림 3〉과 같이 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 세 점에서 만나고 세 교점의 x좌표가 a, b, c라고 하면



〈그림 3〉

$a\le x\le c$에서는 $f(x)\ge g(x)$
$c\le x\le b$에서는 $g(x)\ge f(x)$
이므로

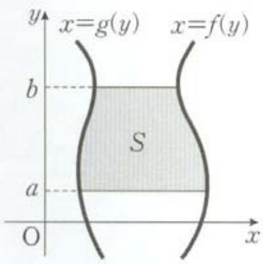
$$S=S_1+S_2$$
$$=\int_a^c \{f(x)-g(x)\}dx+\int_c^b \{g(x)-f(x)\}dx$$
$$=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$

이다.

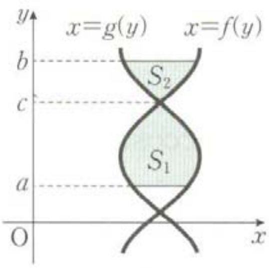
두 함수 $f(y)$, $g(y)$가 폐구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(y)\ge g(y)$일 때, 두 곡선 $x=f(y)$, $x=g(y)$ 및 두 직선 $y=a$, $y=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S=\int_a^b f(y)dy-\int_a^b g(y)dy=\int_a^b \{f(y)-g(y)\}dy$$

〈그림 1〉과 같이 $f(y)\ge g(y)\ge 0$인 경우 곡선 $x=f(y)$와 y축 및 두 직선 $y=a$, $y=b$로 둘러싸인 부분의 넓이에서 곡선 $x=g(y)$와 y축 및 두 직선 $y=a$, $y=b$로 둘러싸인 부분의 넓이를 빼면 되므로



〈그림 1〉



〈그림 2〉

$$S=\int_a^b f(y)dy-\int_a^b g(y)dy=\int_a^b \{f(y)-g(y)\}dy$$

이다.
〈그림 2〉의 경우

$$S=S_1+S_2=\int_a^c \{g(y)-f(y)\}dy+\int_c^b \{f(y)-g(y)\}dy$$
$$=\int_a^b |f(y)-g(y)|dy$$

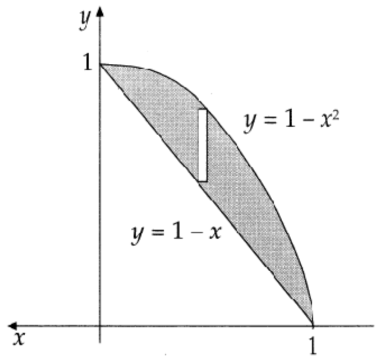
Princeton Review AP Calculus p.193

The area between two curves

Example 1

Find the area of the region between the parabola $y = 1 - x^2$ and the line $y = 1 - x$.

정답 : $\frac{1}{6}$



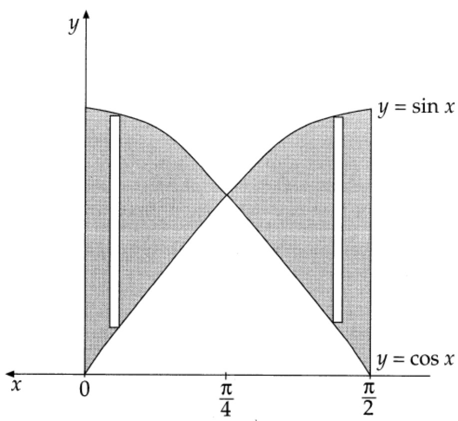
Princeton Review AP Calculus p.194

The area between two curves

Example 2

Find the area of the region between the curve $y = \sin x$ and the curve $y = \cos x$ from 0 to $\frac{\pi}{2}$.

정답 : $2\sqrt{2}-2$



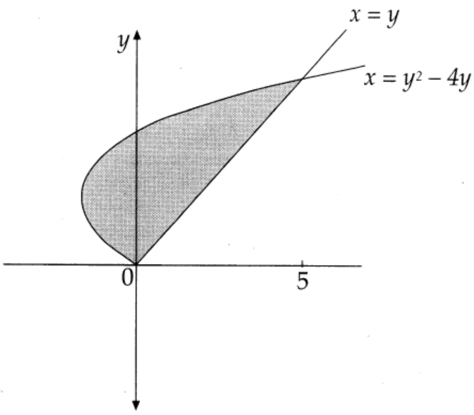
Example 3

Find the area of the region between the curve $x = y^2 - 4y$ and the line $x = y$.

Princeton Review AP Calculus p.199

The area between two curves

정답 : $\dfrac{125}{6}$



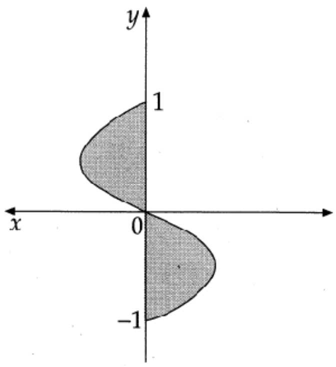
Example 4

Find the area between the curve $x = y^3 - y$ and the line $x = 0$ (the y-axis).

Princeton Review AP Calculus p.199

The area between two curves

정답 : $\dfrac{1}{2}$



부피 (Volume)

1) 단면을 이용한 부피 (Volumes of solids with known cross section)

Given the side of an equilateral triangle, the area is: $A = (side)^2 \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

Given the diameter of a circle, the area is: $A = (diameter)^2 \dfrac{\pi}{4}$

Given the hypotenuse of an isosceles right triangle, the area is: $A = \dfrac{(hypotenuse)^2}{4}$

2) 회전체의 부피 구하기

곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$ $(a<b)$로 둘러싸인 도형을 x축의 둘레로 회전시켜서 생기는 회전체의 부피 V_x는

$$V_x=\pi\int_a^b y^2\,dx=\pi\int_a^b \{f(x)\}^2\,dx$$

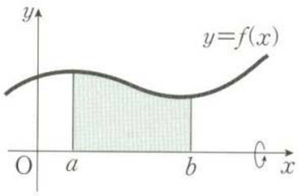
〈그림 1〉과 같은 곡선 $y=f(x)$를 x축의 둘레로 회전시켜서 생기는 회전체를 x축 위의 점 x를 지나고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 모양은 반지름이 $|y|$인 원이 된다.
즉, 단면의 넓이를 $S(x)$라고 하면

$$S(x)=\pi y^2=\pi\{f(x)\}^2$$

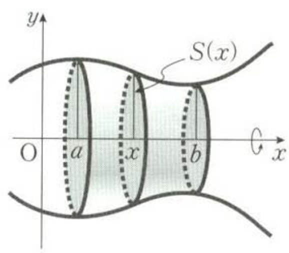
이다.
따라서 회전체의 부피 V_x는

$$V_x=\pi\int_a^b \{f(x)\}^2\,dx$$

이다.



〈그림 1〉



〈그림 2〉

곡선 $x=g(y)$와 y축 및 두 직선 $y=c$, $y=d$로 둘러싸인 도형을 y축의 둘레로 회전시켜서 생기는 회전체의 부피 V_y는

$$V_y=\pi\int_c^d x^2\,dy=\pi\int_c^d \{g(y)\}^2\,dy$$

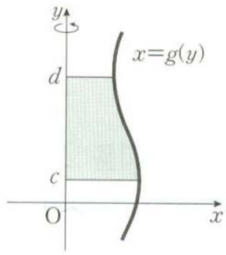
〈그림 3〉과 같은 곡선 $x=g(y)$를 y축의 둘레로 회전시켜서 생기는 회전체를 y축 위의 점 y를 지나고 y축에 수직인 평면으로 자른 단면의 모양은 반지름이 $|x|$인 원이 된다.
즉, 단면의 넓이를 $S(y)$라고 하면

$$S(y)=\pi x^2=\pi\{g(y)\}^2$$

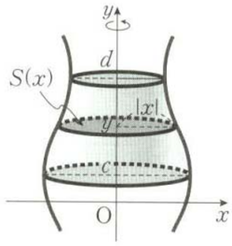
이다.
따라서 회전체의 부피 V_y는

$$V_y=\pi\int_c^d \{g(y)\}^2 dy$$

이다.



〈그림 3〉



〈그림 4〉

3) 회전체의 부피 구하기 – Washer method

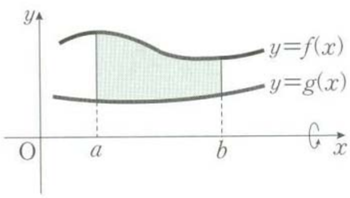
폐구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)\geq g(x)\geq 0$인 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형을 x축의 둘레로 회전시켜서 생기는 회전체의 부피 V는

$$V=\pi\int_a^b \{f(x)\}^2 dx-\pi\int_a^b \{g(x)\}^2 dx$$
$$=\pi\int_a^b [\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2] dx$$

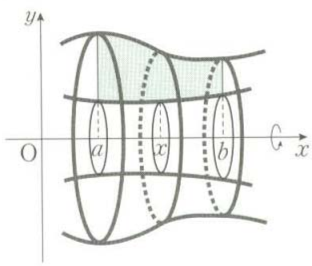
오른쪽 〈그림 1〉과 같이 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 두 직선 $x=a$, $x=b$ 로 둘러싸인 도형을 x축의 둘레로 회전시키면 가운데가 비어 있는 형태의 회전체가 만들어진다.
이 회전체를 x축에 수직인 평면으로 잘랐을 때 생기는 단면의 모양은 〈그림 2〉에서와 같이 와셔(washer) 모양을 하고 있다.
이 때, 단면의 넓이는 큰 원과 작은 원의 넓이의 차로부터 구할 수 있고, 〈그림 3〉에서와 같이 큰 원의 반지름은 $f(x)$, 작은 원의 반지름은 $g(x)$와 같으므로 단면의 넓이는

$$\pi\{f(x)\}^2-\pi\{g(x)\}^2$$

이 된다.



〈그림 1〉

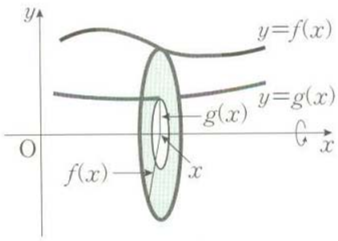


〈그림 2〉

따라서 회전체의 부피 V는

$$V=\pi\int_a^b[\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2]dx$$

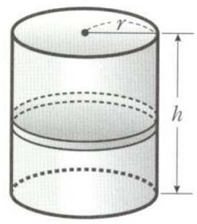
이다.



〈그림 3〉

4) 회전체의 부피 구하기 – Shell method

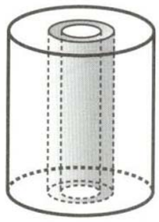
원기둥의 부피를 구할 때 〈그림 1〉의 와셔법처럼 원기둥을 조그마한 원기둥 조각으로 나누어 그것들의 부피를 모두 더하는 방법으로 구할 수도 있지만, 〈그림 2〉와 같이 속이 비어 있는 원통 모양으로 나누어 그것들의 부피를 모두 더하는 방법으로 구할 수도 있다.



〈그림 1〉 와셔법

〈그림 2〉에서 어두운 원통 껍질(Cylindrical Shell) 부분을 확대하여 그 부피를 V라고 하면

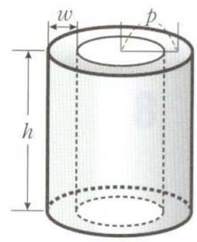
$$\begin{aligned}V&=(\text{바깥쪽 원통})-(\text{안쪽 원통})\\&=\pi\left(p+\frac{w}{2}\right)^2\cdot h-\pi\left(p-\frac{w}{2}\right)^2\cdot h\\&=2\pi\cdot p\cdot w\cdot h\\&=2\pi\cdot(\text{평균 반지름})\cdot(\text{두께})\cdot(\text{높이})\end{aligned}$$


〈그림 2〉 Shell Method

따라서 원기둥의 반지름을 r이라 하고 $w\to 0$이라고 하면 원기둥의 부피는

$$\int_0^r 2\pi\cdot p\cdot h\,dp=\left[\pi hp^2\right]_0^r=\pi r^2 h$$

가 됨을 알 수 있다. 이것이 Shell Method이다.

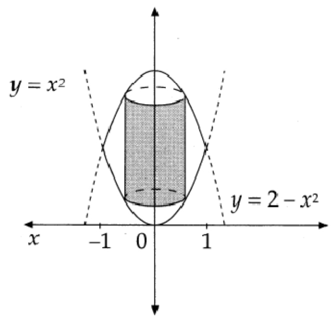


〈그림 3〉 Cylindrical Shell

Let's examine the region bounded above by the curve $y = 2 - x^2$ and below by the curve $y = x^2$, from $x = 0$ to $x = 1$. Suppose you had to revolve the region about the y-axis instead of the x-axis:

$$2\pi\int_0^1 x\left(2-2x^2\right)dx=2\pi\int_0^1\left(2x-2x^3\right)dx=2\pi\left(x^2-\frac{x^4}{2}\right)\Bigg|_0^1=\pi$$

$$2\pi\int_a^b x\left[f(x)-g(x)\right]dx$$



This is the formula for finding the volume using cylindrical shell when the region is rotated around the y-axis.

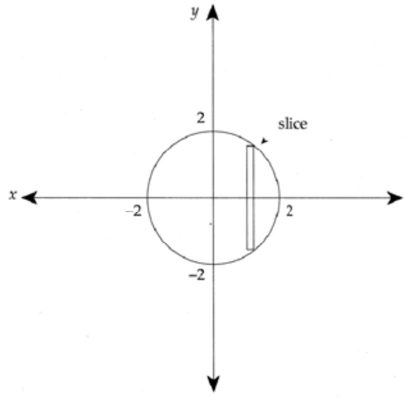
Example 5

Suppose we are asked to find the volume of a solid whose base is the circle $x^2 + y^2 = 4$, and where cross-sections perpendicular to the x-axis are all squares whose sides lie on the base of the circle. How would we find the volume?

Princeton Review AP Calculus p.211

Volume of solids with known cross section

정답 :



What this problem is telling us is that every time we make a vertical slice, the slice is the length of the base of a square. If we want to find the volume of the solid, all that we do is integrate the area of the square, from one endpoint of the circle to the other.

The side of the square is the vertical slice whose length is $2y$, which we can find by solving the equation of the circle for y and multiplying by 2. We get $y = \sqrt{4-x^2}$. Then the length of a side of the square is $2\sqrt{4-x^2}$. Because the area of a square is $side^2$, we can find the volume by: $\int_{-2}^{2}\left(16-4x^2\right)dx$.

Example 6

Find the volume of a solid whose base is the region between the x-axis and the curve $y = 4 - x^2$, and whose cross-sections perpendicular to the x-axis are equilateral triangles with a side that lies on the base.

Princeton Review AP Calculus p.217

Volume of solids with known cross section

Answer: The curve $y = 4 - x^2$ intersects the x-axis at $x = -2$ and $x = 2$. The side of the triangle is $4 - x^2$, so all that we have to do is evaluate $\frac{\sqrt{3}}{4}\int_{-2}^{2}\left(4-x^2\right)^2 dx$.

Expand the integrand to get:

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\int_{-2}^{2}\left(16-8x^2+x^4\right)dx$$

Then integrate to get:

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\left(16x-\frac{8x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_{-2}^{2} = \frac{128\sqrt{3}}{15} \approx 14.780$$

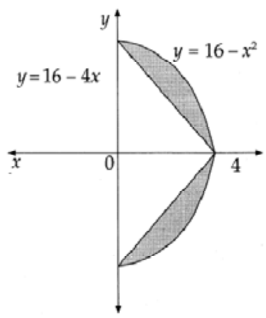
Example 7

Find the volume of the solid that results when the region bounded by the curve $y = 16 - x^2$ and the curve $y = 16 - 4x$ is rotated about the x-axis. Use the washer method and set up but do not evaluate the integral.

Princeton Review AP Calculus p.217

Volume of solids with known cross section

$$16 - x^2 = 16 - 4x$$
$$x^2 = 4x$$
$$x^2 - 4x = 0$$
$$x = 0, 4$$



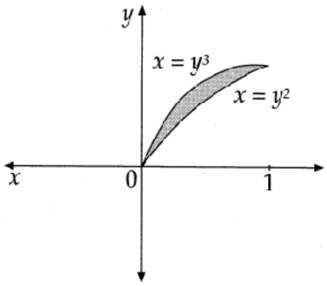
Slicing vertically, the top curve is always $y = 16 - x^2$ and the bottom is always $y = 16 - 4x$, so the integral looks like this:

$$\pi\int_0^4\left[\left(16-x^2\right)^2-\left(16-4x\right)^2\right]dx$$

Example 8

Princeton Review AP Calculus
p. 205

Volume of a solid of revolution



Find the volume of the solid that results when the region bounded by the curve $x = y^2$ and the curve $x = y^3$, from $y = 0$ to $y = 1$ is revolved about the y-axis.

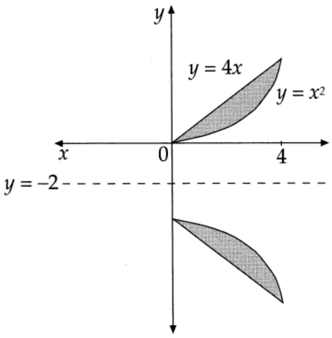
정답 :

$$\pi\int_0^1 \left(y^4 - y^6\right)\, dx = \pi\left[\frac{y^5}{5} - \frac{y^7}{7}\right]_0^1 = \frac{2\pi}{35}$$

Example 9

Princeton Review AP Calculus
p. 206

Volume of a solid of revolution



Find the volume of the solid that results when the area bounded by the curve $y = x^2$ and the curve $y = 4x$ is revolved about the line $y = -2$. Set up but do not evaluate the integral. (This is how the AP exam will say it!)

정답 :

$$\pi\int_0^4 \left[\left(4x+2\right)^2 - \left(x^2+2\right)^2\right] dx$$

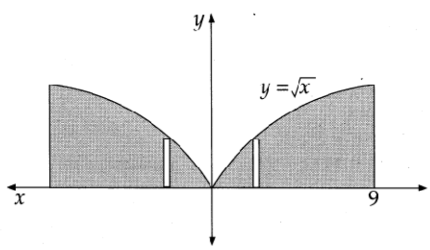
Example 10

Princeton Review AP Calculus
p. 208

Shell method

Find the volume of the region that results when the region bounded by the curve $y = \sqrt{x}$, the x-axis, and the line $x = 9$ is revolved about the y-axis. Set up but do not evaluate the integral.

정답 :

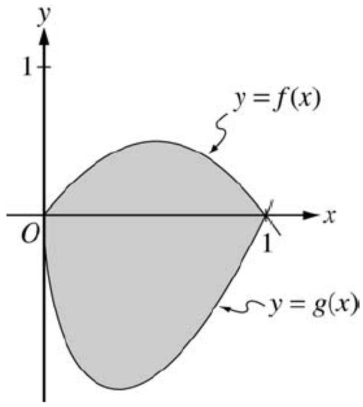


Notice that the limits of integration are from $x = 0$ to $x = 9$, and that each vertical slice is bounded from above by the curve $y = \sqrt{x}$ and from below by the x-axis ($y = 0$). We need to evaluate the integral:

$$2\pi\int_0^9 x\left(\sqrt{x} - 0\right)dx = 2\pi\int_0^9 x\left(\sqrt{x}\right)dx$$

2004 AP Calculus BC FREE-RESPONSE QUESTIONS

A graphing calculator is required for some problems or parts of problems



2. Let f and g be the functions given by $f(x) = 2x(1 - x)$ and $g(x) = 3(x - 1)\sqrt{x}$ for $0 \le x \le 1$. The graphs of f and g are shown in the figure above.

   (a) Find the area of the shaded region enclosed by the graphs of f and g.

   (b) Find the volume of the solid generated when the shaded region enclosed by the graphs of f and g is revolved about the horizontal line $y = 2$.

   (c) Let h be the function given by $h(x) = kx(1 - x)$ for $0 \le x \le 1$. For each $k > 0$, the region (not shown) enclosed by the graphs of h and g is the base of a solid with square cross sections perpendicular to the x-axis. There is a value of k for which the volume of this solid is equal to 15. Write, but do not solve, an equation involving an integral expression that could be used to find the value of k.

2002 AP Calculus BC FREE-RESPONSE QUESTIONS

A graphing calculator is required for some problems or parts of problems

1. Let f and g be the functions given by $f(x) = e^x$ and $g(x) = \ln x$.

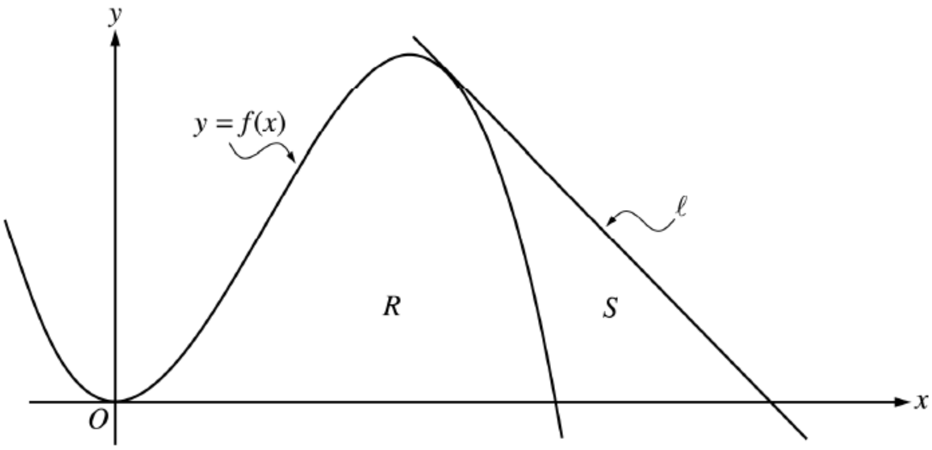
   (a) Find the area of the region enclosed by the graphs of f and g between $x = \frac{1}{2}$ and $x = 1$.

   (b) Find the volume of the solid generated when the region enclosed by the graphs of f and g between $x = \frac{1}{2}$ and $x = 1$ is revolved about the line $y = 4$.

   (c) Let h be the function given by $h(x) = f(x) - g(x)$. Find the absolute minimum value of $h(x)$ on the closed interval $\frac{1}{2} \le x \le 1$, and find the absolute maximum value of $h(x)$ on the closed interval $\frac{1}{2} \le x \le 1$. Show the analysis that leads to your answers.

2003 AP Calculus BC FREE-RESPONSE QUESTIONS (Form B)

A graphing calculator is required for some problems or parts of problems.



1. Let f be the function given by $f(x) = 4x^2 - x^3$, and let ℓ be the line $y = 18 - 3x$, where ℓ is tangent to the graph of f. Let R be the region bounded by the graph of f and the x-axis, and let S be the region bounded by the graph of f, the line ℓ, and the x-axis, as shown above.

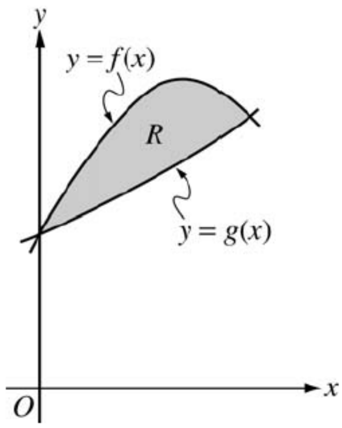
   (a) Show that ℓ is tangent to the graph of $y = f(x)$ at the point $x = 3$.

   (b) Find the area of S.

   (c) Find the volume of the solid generated when R is revolved about the x-axis.

2005 AP Calculus AB FREE-RESPONSE QUESTIONS (Form B)

A graphing calculator is required for some problems or parts of problems



1. Let f and g be the functions given by $f(x) = 1 + \sin(2x)$ and $g(x) = e^{x/2}$. Let R be the shaded region in the first quadrant enclosed by the graphs of f and g as shown in the figure above.

   (a) Find the area of R.

   (b) Find the volume of the solid generated when R is revolved about the x-axis.

   (c) The region R is the base of a solid. For this solid, the cross sections perpendicular to the x-axis are semicircles with diameters extending from $y = f(x)$ to $y = g(x)$. Find the volume of this solid.

드디어!!!
News letter 문제를 푼 학생이 나타났습니다. ☞ 이군 =.=

이번에도 기출문제 답은 나중에 보내드립니다.

이번에는 누가 풀고 답을 보낼지 지켜보겠습니다.

We're on the Web!
See us at:
http://apcalculus.tistory.com

네이버 / 다음 카페 개설 안내

- 블로그에는 누가 오고 가는지 알 길이 없어 네이버와 다음에 카페를 개설했습니다.
  네이버 카페 : cafe.naver.com/advancedplacement
  다음 카페 : cafe.daum.net/APexam

- 두 카페 모두 동일한 정보로 운영되니, 편한 곳에 가입하시기 바랍니다.
- 기존에 운영되던 블로그는 게시글은 카페에 옮긴 후 폐쇄예정입니다.

AP Calculus 뉴스레터에 대해…

- 본 뉴스레터는 AP Calculus 수강생의 개념 재확인 및 기출문제 풀이를 위해 제작되었습니다.
- 기출문제 정답 및 풀이는 2 월 15 일 발송됩니다.
  (답이 미리 필요한 분은 카페, 메일을 이용해 연락주시기 바랍니다.)
- 내용 및 문제에 대한 질문은 카페, 메일을 이용해 주시기 바랍니다.

EGO Expert Group

경기도 성남시 분당구 수내동 로얄팰리스 하우스빌 B2705
e-mail : ego.expertgroup@gmail.com
네이버 : http://cafe.naver.com/advancedplacement
다 음 : http://cafe.daum.net/APexam