EGO Expert Group
2008.02.28 Issue 5

AP Calculus

Topics:

- 역함수의 미분법
  - 역삼각함수의 미분
- 삼각치환 적분
- AP Calculus Tool Installation

새내기를 위한
대학수학기본서
P.63

역함수의 미분

함수 $y=f(x)$가 미분가능하고 그 역함수가 $x=g(y)$일 때,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\left(\text{단, } \frac{dx}{dy}\neq 0\right) \text{ 또는 } f'(x)=\frac{1}{g'(y)} \ (\text{단, } g'(y)\neq 0)$$

(1) 함수 $y=f(x)$의 역함수를 $x=g(y)$라 하고 $x=g(y)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$1=\frac{d}{dx}g(y)=\frac{d}{dy}g(y)\cdot\frac{dy}{dx}=g'(y)\frac{dy}{dx} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또, $x=g(y)$의 양변을 y에 대하여 미분하면 $\frac{dx}{dy}=g'(y)$ $\cdots\cdots ㉡$

따라서 ㉠, ㉡에 의하여 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{g'(y)}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$

예를 들어 $y=2x$에서 $\frac{dy}{dx}=2$이고 $y=2x$의 역함수 $x=\frac{y}{2}$에서 $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{2}$이므로 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ 또는 $\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}=1$이 성립함을 쉽게 확인할 수 있다.

어떤 함수가 주어졌을 때, 그것의 역함수의 도함수가 더 구하기 쉬우면 역함수의 도함수의 역수를 구해서 원함수의 도함수를 구한다.

예를 들어 $y=\sqrt{\frac{3}{x}-1}$의 도함수를 구하려면 $u=\frac{3}{x}-1$로 놓고 $\frac{dy}{du}$와 $\frac{du}{dx}$를 구하여 합성함수의 미분법을 이용한다. 그러나 이와 같은 방법을 잊어버렸거나 이러한 일반적인 방법을 사용하기가 어렵다면 다음과 같이 구한다.

$y=\sqrt{\frac{3}{x}-1}$의 역함수는 $x=\frac{3}{1+y^2}$

$$\frac{dx}{dy}=-\frac{3\cdot 2y}{(1+y^2)^2}=-\frac{6y}{(1+y^2)^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=-\frac{(1+y^2)^2}{6y}=-\frac{\left(1+\frac{3}{x}-1\right)^2}{6\sqrt{\frac{3}{x}-1}}$$

$$=-\frac{3}{2x^2\sqrt{\frac{3}{x}-1}}$$

Example 1

새내기를 위한 대학수학기본서
p.64

역함수의 도함수

다음 각 함수의 역함수를 구하여라.

(1) $f(x)=\dfrac{x-3}{x+2}$ (2) $f(x)=\sqrt{3+5x}$

풀이 (1) $y=\dfrac{x-3}{x+2}$이라 하면 $xy+2y=x-3$

$\therefore x=-\dfrac{2y+3}{y-1}=\dfrac{2y+3}{1-y}$

x와 y를 바꿔주면 $y=\dfrac{2x+3}{1-x}$ $\therefore f^{-1}(x)=\dfrac{2x+3}{1-x}$

(2) $y=\sqrt{3+5x}$라 하면 $y^2=3+5x$ $\therefore x=\dfrac{1}{5}(y^2-3)$

x와 y를 바꿔주면 $y=\dfrac{1}{5}(x^2-3)$ $\therefore f^{-1}(x)=\dfrac{1}{5}(x^2-3)$

Example 2

새내기를 위한 대학수학기본서
p.64

역함수의 도함수

다음 함수의 역함수의 도함수를 구하여라.

(1) $y=x^2-2x\ (x\le 1)$ (2) $y=x\sqrt{1+x}\ (x>0)$

풀이 (1) $y=x^2-2x$에서 $x^2-2x-y=0$ $\therefore x=1-\sqrt{1+y}\ (\because x\le 1)$

$\therefore y=1-\sqrt{1+x}\ (x\ge -1)$, 즉 $f^{-1}(x)=1-\sqrt{1+x}\ (x\ge -1)$

$\therefore \dfrac{d}{dx}f^{-1}(x)=-\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$

(2) 주어진 함수의 역함수를 구하는 것은 어려우므로 역함수의 도함수를 직접 구해보자.

$$\frac{dy}{dx}=(x)'\sqrt{1+x}+x(\sqrt{1+x})'=\sqrt{1+x}+\frac{x}{2\sqrt{1+x}}=\frac{2+3x}{2\sqrt{1+x}}$$

$\therefore \dfrac{dx}{dy}=\dfrac{2\sqrt{1+x}}{3x+2}$, 즉 $\dfrac{d}{dx}f^{-1}(x)=\dfrac{2\sqrt{1+x}}{3x+2}$

Example 3

새내기를 위한 대학수학기본서
p.64

역함수의 도함수

다음 함수에서 $\dfrac{dy}{dx}$를 구하여라.

(1) $x=y^3$ (2) $y=\sqrt[3]{x-3}$

풀이 (1) $x=y^3$에서 양변을 y에 대하여 미분하면 $\dfrac{dx}{dy}=3y^2$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{3y^2}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

(2) $y=\sqrt[3]{x-3}$의 양변을 세제곱하면 $y^3=x-3$

양변을 y에 대하여 미분하면 $3y^2=\dfrac{dx}{dy}$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{3y^2}=\frac{1}{3\sqrt[3]{(x-3)^2}}$$

역삼각함수의 도함수

(1) $\dfrac{d}{dx}(\sin^{-1}x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	(2) $\dfrac{d}{dx}(\cos^{-1}x)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
(3) $\dfrac{d}{dx}(\tan^{-1}x)=\dfrac{1}{1+x^2}$	(4) $\dfrac{d}{dx}(\csc^{-1}x)=-\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
(5) $\dfrac{d}{dx}(\sec^{-1}x)=\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	(6) $\dfrac{d}{dx}(\cot^{-1}x)=-\dfrac{1}{1+x^2}$

◀ 삼각함수의 미분
(i) $(\sin x)'=\cos x$
(ii) $(\cos x)'=-\sin x$
(iii) $(\tan x)'=\sec^2 x$

◀ (i) $\sin^2 x+\cos^2 x=1$
(ii) $\cos x=\pm\sqrt{1-\sin^2 x}$
$\sin x=\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$

(1) $y=\sin^{-1}x$를 x에 대하여 미분해보자.

$$y=\sin^{-1}x\ (|x|<1) \Longleftrightarrow \sin y=x\left(-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\right)$$

$\sin y=x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\cos y\frac{dy}{dx}=1,\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\left(-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}\right.$에서 $\cos y>0$이므로 $\left.\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}=\sqrt{1-x^2}\right)$

(2) $y=\cos^{-1}x$를 x에 대하여 미분해보자.

$$y=\cos^{-1}x\ (|x|<1) \Longleftrightarrow \cos y=x\ (\text{단, } 0<y<\pi)$$

$\cos y=x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$-\sin y\frac{dy}{dx}=1,\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\sin y}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

($0<y<\pi$에서 $\sin y>0$이므로 $\sin y=\sqrt{1-\cos^2 y}=\sqrt{1-x^2}$)

(3) $y=\tan^{-1}x$를 x에 대하여 미분해보자.

$$y=\tan^{-1}x\ (x\in R) \Longleftrightarrow \tan y=x\ \left(\text{단, } -\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\right)$$

$\tan y=x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\sec^2 y\frac{dy}{dx}=1,\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sec^2 y}=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{1+x^2}$$

삼각치환을 이용한 적분

표현	치환	성질
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x=a\sin\theta,\ -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$	$1-\sin^2\theta=\cos^2\theta$
$\sqrt{a^2+x^2}$	$x=a\tan\theta,\ -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$	$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x=a\sec\theta,\ 0\le\theta<\frac{\pi}{2}$ 또는 $\pi\le\theta<\frac{3}{2}\pi$	$\sec^2\theta-1=\tan^2\theta$

(단, $a>0$)

원이나 타원의 넓이를 구하고자 할 때, $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ $(a>0)$ 형태의 적분 계산이 필요하다. 이 때, $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ 형태의 적분은 그 자체로 계산하기 어렵다. 이 경우 $x=a\sin\theta$로 치환(삼각치환)함으로써 근호를 없애고 적분을 계산할 수 있는 형태로 바꿀 수 있다.

마찬가지로 $\sqrt{a^2+x^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$의 형태가 나타나는 적분의 경우 각각

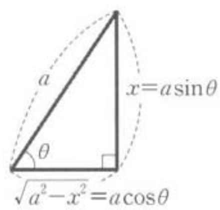
$$x=a\tan\theta,\ x=a\sec\theta$$

로 치환함으로써 적분이 가능한 형태로 바꿀 수 있다.

위의 삼각치환표에서 θ의 제한은 치환함수가 일대일함수로 정의되도록 보장해준다.

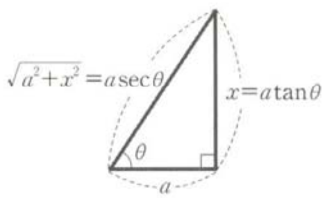
(1) $\sqrt{a^2-x^2}$에서 $x=a\sin\theta$ $(a>0)$로 치환하면

$$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-(a\sin\theta)^2}=\sqrt{a^2(1-\sin^2\theta)}$$
$$=\sqrt{a^2\cos^2\theta}=a\cos\theta$$
$$\left(\because\ -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\text{일 때 } 0\le\cos\theta\le1\right)$$



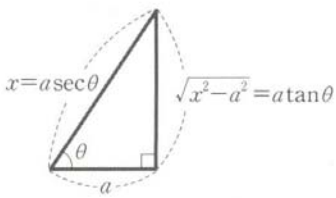
(2) $\sqrt{a^2+x^2}$에서 $x=a\tan\theta$ $(a>0)$로 치환하면

$$\sqrt{a^2+x^2}=\sqrt{a^2+(a\tan\theta)^2}=\sqrt{a^2(1+\tan^2\theta)}$$
$$=\sqrt{a^2\sec^2\theta}=a\sec\theta$$
$$\left(\because\ -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\text{일 때 }\sec\theta\ge1\right)$$



(3) $\sqrt{x^2-a^2}$에서 $x=a\sec\theta$ $(a>0)$로 치환하면

$$\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{(a\sec\theta)^2-a^2}=\sqrt{a^2(\sec^2\theta-1)}$$
$$=\sqrt{a^2\tan^2\theta}=a\tan\theta$$
$$\left(\because\ 0\le\theta<\frac{\pi}{2}\text{ 또는 }\pi\le\theta<\frac{3}{2}\pi\text{일 때 }\tan\theta\ge0\right)$$



Example 4

$y=\sin^{-1}(x^2-1)$을 미분하여라.

대학새내기를 위한 수학기본서

p.73

역삼각함수의 도함수

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-(x^2-1)^2}}\frac{d}{dx}(x^2-1)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1-(x^4-2x^2+1)}}\cdot 2x=\frac{2x}{\sqrt{2x^2-x^4}}$$

Example 5

다음을 미분하여라.

(1) $y=\dfrac{1}{\sin^{-1}2x}$ (2) $f(x)=x\tan^{-1}\sqrt{2x}$

대학새내기를 위한 수학기본서

p.73

역삼각함수의 도함수

(1) $$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(\sin^{-1}2x)^{-1}=-(\sin^{-1}2x)^{-2}\frac{d}{dx}(\sin^{-1}2x)$$
$$=-\frac{1}{(\sin^{-1}2x)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\cdot 2$$
$$=-\frac{2}{(\sin^{-1}2x)^2\sqrt{1-4x^2}}$$

(2) $$f'(x)=\tan^{-1}\sqrt{2x}+x\cdot\frac{1}{1+(\sqrt{2x})^2}\cdot\frac{d}{dx}(\sqrt{2x})$$
$$=\tan^{-1}\sqrt{2x}+x\cdot\frac{1}{1+2x}\cdot\frac{1}{2}(2x)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2$$
$$=\tan^{-1}\sqrt{2x}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}+2\sqrt{2}x}$$

Example 6

$\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\dfrac{\pi}{2}$임을 증명하여라.

대학새내기를 위한 수학기본서

p.73

역삼각함수의 도함수

$f(x)=\sin^{-1}x+\cos^{-1}x$라 하면

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=0$$

즉, 모든 x에 대해 $f(x)=C$ (C는 상수)이므로 $f(x)$에 $x=0$을 대입하면

$$f(0)=\sin^{-1}0+\cos^{-1}0=0+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore f(x)=\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}$$

Example 7

대학새내기를 위한 수학기본서
p. 159
삼각치환을 이용한 적분

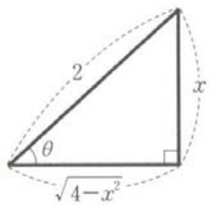
부정적분 $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx$를 구하여라.

$x=2\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$라고 하면 $dx=2\cos\theta d\theta$이므로

$$\int\frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx=\int\frac{\sqrt{4-4\sin^2\theta}}{4\sin^2\theta}2\cos\theta d\theta=\int\frac{\sqrt{4\cos^2\theta}}{2\sin^2\theta}\cos\theta d\theta$$
$$=\int\frac{2\cos\theta}{2\sin^2\theta}\cos\theta d\theta=\int\cot^2\theta d\theta$$
$$=\int(\csc^2\theta-1)d\theta=-\cot\theta-\theta+C$$

이것을 원래 변수 x에 대한 식으로 나타내자.
오른쪽 그림과 같이 θ를 양각으로 하는 직각삼각형에서
$\cot\theta=\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$, $\theta=\sin^{-1}\frac{x}{2}$임을 알 수 있다.

$$\therefore\int\frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx=-\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}-\sin^{-1}\frac{x}{2}+C$$



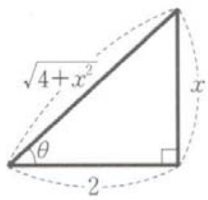
Example 8

대학새내기를 위한 수학기본서
p. 159
삼각치환을 이용한 적분

부정적분 $\int\frac{1}{\sqrt{4+x^2}}dx$를 구하여라.

$x=2\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라고 하면 $dx=2\sec^2\theta\,d\theta$이므로

$$\int\frac{1}{\sqrt{4+x^2}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{4(1+\tan^2\theta)}}2\sec^2\theta\,d\theta=\int\frac{1}{\sqrt{4\sec^2\theta}}2\sec^2\theta\,d\theta$$
$$=\int\frac{1}{2\sec\theta}2\sec^2\theta\,d\theta=\int\sec\theta\,d\theta$$
$$=\ln|\sec\theta+\tan\theta|+C$$
$$\therefore\int\frac{1}{\sqrt{4+x^2}}dx=\ln\left|\frac{\sqrt{4+x^2}}{2}+\frac{x}{2}\right|+C$$



$\sec\theta=\frac{\sqrt{4+x^2}}{2}$, $\tan\theta=\frac{x}{2}$

Example 9

부정적분 $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx$를 구하여라. (단, $x>3$)

대학새내기를 위한 수학기본서 p.159

삼각치환을 이용한 적분

$x=3\sec\theta\left(0\le\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라고 하면 $dx=3\sec\theta\tan\theta d\theta$이므로

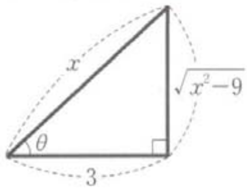
$$\int\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx=\int\frac{\sqrt{(3\sec\theta)^2-9}}{3\sec\theta}3\sec\theta\tan\theta d\theta$$

$$=\int\sqrt{9\sec^2\theta-9}\cdot\tan\theta d\theta=\int\sqrt{9(\sec^2\theta-1)}\cdot\tan\theta d\theta$$

$$=\int 3\tan\theta\tan\theta d\theta=\int 3\tan^2\theta d\theta$$

$$=3\int(\sec^2\theta-1)d\theta=3\tan\theta-3\theta+C$$

$$\therefore\int\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx=\sqrt{x^2-9}-3\sec^{-1}\frac{x}{3}+C$$



$\tan\theta=\frac{\sqrt{x^2-9}}{3}$, $\theta=\sec^{-1}\frac{x}{3}$

Example 10

$$\int\frac{dx}{x^2+4x+5}$$

Princeton review AP Calculus p.229

삼각치환을 이용한 적분

Complete the square in the denominator (your algebra teacher warned you about this):

$$x^2+4x+5=(x+2)^2+1$$

Now rewrite the integral:

$$\int\frac{dx}{1+(x+2)^2}$$

Using u-substitution, let $u=x+2$ and $du=dx$. Then do the substitution:

$$\int\frac{du}{1+u^2}=\tan^{-1}u+C$$

When you put the function of x back in to the integral, it reads:

$$\tan^{-1}(x+2)+C$$

시험접수는 다 하셨겠지요?

꼭!! AP coordinator 를 통해 접수하시기 바랍니다.

네이버, 다음에
AP 카페를 운영 중이니
가입하시기 바랍니다.
(네이버 강추!!)

AP Calculus Tool 설치 안내

- TI-89 에 Calculus Tool 프로그램을 설치하면 접선/법선의 방정식, n 계 도함수, 적분의 근사값, Newton's method 등의 문제를 간편하게 풀 수 있습니다.
- 꼭 다음 글들을 확인하고 calculus tool 을 설치하시기 바랍니다.
  (첨부한 뉴스레터 워드파일에서 웹페이지로 연결됩니다.)

TI-89 Calculus Tool (매뉴얼 및 Calculus tool 프로그램)

TI-89 에 Calculus Tool 설치하기

TI-89 Calculus Tool Application 을 시작하기 전에

TI-89 음함수의 n 계도함수 구하기

TI-89 접선 & 법선의 방정식 구하기

TI-89 뉴턴의 방법으로 방정식의 근 구하기

TI-89 CalcTool-Integ

AP Calculus 뉴스레터에 대해…

- AP Calculus 수강생의 개념정리 및 기출문제 풀이를 위해 제작되었습니다.
- 이번 뉴스레터에서는 기출문제를 제공을 쉽니다.
- 내용 및 문제에 대한 질문은 email 및 블로그를 이용해 주시기 바랍니다.

EGO Expert Group
경기도 성남시 분당구 수내동 로얄팰리스 하우스빌 B2705
e-mail : ego.expertgroup@gmail.com

We're on the Web!
See us at:
네이버 : http://cafe.naver.com/advancedplacement
다 음 : http://cafe.daum.net/APexam