EGO Expert Group
2008.01.16 Issue 3

AP Calculus

Topics:

- Mean value theorem
- Average value of a function
- AP FRQ 기출문제
- 2008 년 서울대 자연계열 논술문제

Barron's AP Calculus

P.61

Mean value theorem(평균값 정리)

함수 $f(x)$ 가 폐구간 $[a,b]$ 에서 연속이고 개구간 (a,b) 에서 미분가능할 때

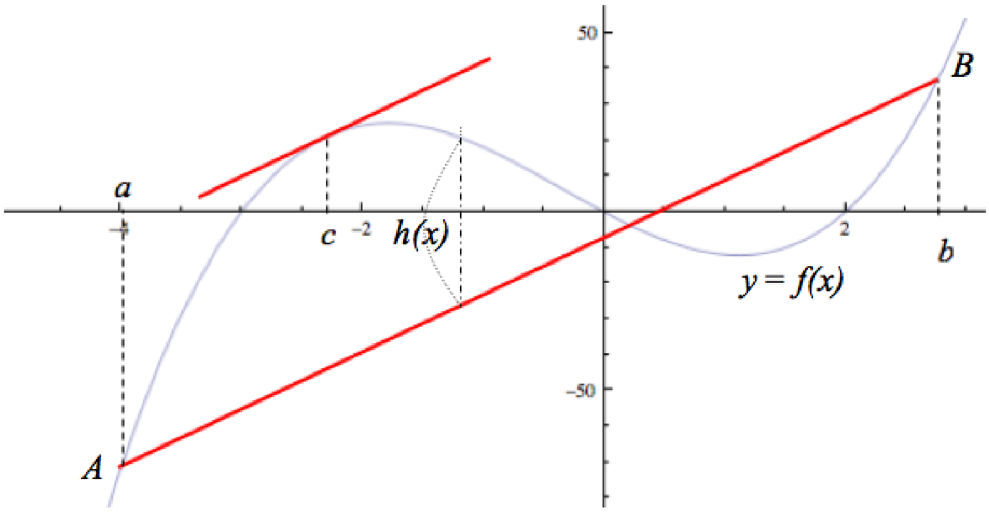
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \quad (a<c<b)$$

를 만족하는 c 가 적어도 하나 존재한다.

평균값의 정리에서 $f(a)=f(b)$ 인 경우를 Rolle's theorem(롤의 정리)라고 한다.

이 경우 $f'(c)=0$ 이 되고, 이것은 개구간 (a,b) 안에 horizontal tangent (수평접선)을 갖는 접점 c 가 존재한다는 것을 의미한다.

결과적으로 평균값의 정리를 직선의 기울기로 해석한다면, 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ 를 지나는 직선의 기울기 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 와 같은 기울기를 갖는 접선의 접점 c 가 개구간 (a,b) 안에 적어도 하나 이상 존재한다는 것을 의미한다.



앞의 그래프에서 직선 AB 의 방정식은 $y-f(a)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ 이다.

$h(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ 라고 하면,

1) 함수 $h(x)$ 는 폐구간 $[a,b]$ 에서 연속인 함수 $f(x)$ 와 연속인 일차다항식 $-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ 의 합이므로 $[a,b]$ 에서 연속이다.

2) 개구간 (a,b) 에서 $f(x)$ 와 일차다항식 $-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ 이 미분가능하므로 $h(x)$ 도 개구간 (a,b) 에서 미분가능하다.

3) $h(a)=f(a)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a)=0$

$h(b)=f(b)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)=0$

즉, $h(a)=h(b)=0$ 이므로 Rolle's theorem 에서 $h'(c)=0$ $(a<c<b)$ 을 만족하는 c 가 존재한다.

$h'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 이므로 $h'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$

따라서, $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ $(a<c<b)$ 를 만족하는 c 가 적어도 하나 이상 존재한다.

※ 평균값 정리에서 함수 $f(x)$ 가 폐구간 $[a,b]$ 에서 연속이고 개구간 (a,b) 에서 미분가능하다는 조건이 필요하다.

1) 연속이 아닌 경우

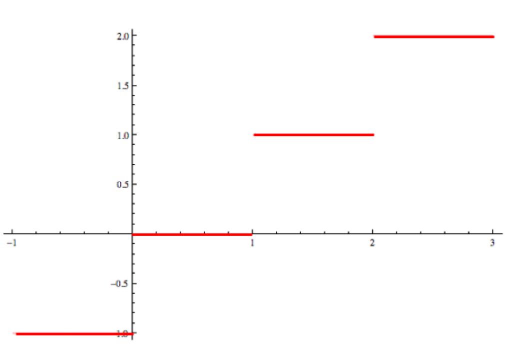


Figure 1 y=[x]

2) 미분가능하지 않은 경우

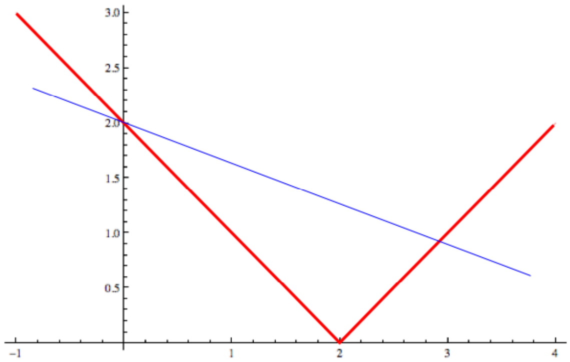


Figure 2 y=|x−2|

Example 1

$f(x)=(x-1)(x-3)^2$일 때 $f'(c)=0$ $(1<c<3)$이 되는 c가 적어도 하나 존재함을 보이고, c의 값을 구하여라.

대학새내기를 위한 수학기본서
p.89 #1

Rolle's theorem

풀이 함수 $f(x)$는 다항함수이므로 폐구간 $[1,\ 3]$에서 연속이고, 개구간 $(1,\ 3)$에서 미분가능하다.
$f(1)=f(3)=0$이므로 롤의 정리로부터 $f'(c)=0$ $(1<c<3)$이 되는 c가 적어도 하나 존재한다.
또한

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x-3)^2+(x-1)\cdot 2(x-3) \\ &= (x-3)\{(x-3)+(2x-2)\} \\ &= (x-3)(3x-5) \end{aligned}$$

따라서 $c=\frac{5}{3}$일 때 $f'(c)=0$이고 $1<c<3$을 만족한다.

Example 2

롤의 정리를 이용하여 방정식 $\tan x=1-x$의 해가 구간 $(0,\ 1)$ 안에 존재함을 보여라.

대학새내기를 위한 수학기본서
p.89 #2

Rolle's theorem

증명 $f(x)=(x-1)\sin x$라고 하면 함수 $f(x)$는 폐구간 $[0,\ 1]$에서 연속이고 개구간 $(0,\ 1)$에서 미분가능하다.
$f(0)=f(1)=0$이므로 롤의 정리로부터 $f'(c)=0$인 c가 개구간 $(0,\ 1)$ 안에 존재한다.
즉, $f'(x)=\sin x+(x-1)\cos x$이므로

$$f'(c)=\sin c+(c-1)\cos c=0$$

인 c가 개구간 $(0,\ 1)$ 안에 존재한다.

$$\therefore \sin c=(1-c)\cos c \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$0<c<1$에서 $\cos c\neq 0$이므로 ㉠의 양변을 $\cos c$로 나누면

$$\frac{\sin c}{\cos c}=1-c \qquad \therefore \tan c=1-c$$

따라서 방정식 $\tan x=1-x$는 개구간 $(0,\ 1)$에서 근이 존재하며, 그 근은 c가 된다.

Example 3

대학새내기를 위한 수학기본서
p.89 #3

Mean value theorem.

평균값의 정리를 이용하여 다음 극한값을 구하여라.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{x-\sin x}$$

풀이 $x\to 0^+$이므로 $x>0$ $\quad\therefore 0<\sin x<x$

$f(x)=\sin x$라 하면 $f(x)$는 폐구간 $[\sin x,\ x]$에서 연속이고 개구간 $(\sin x,\ x)$에서 미분가능하므로 평균값의 정리에 의하여

$$\frac{f(x)-f(\sin x)}{x-\sin x}=f'(c)\quad(\sin x<c<x)$$

즉, $\dfrac{\sin x-\sin(\sin x)}{x-\sin x}=f'(c)\quad(\sin x<c<x)$

를 만족하는 c가 존재한다.

$f'(c)=\cos c$이고 $x\to 0^+$일 때 $\sin x<c<x$에서 $c\to 0$이므로

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{x-\sin x}=\lim_{c\to 0}\cos c=1$$

Example 4

대학새내기를 위한 수학기본서
p.89 #5

Mean value theorem

A자동차 회사의 신형 스포츠카는 정지 상태에서 일정하게 가속하여 100m를 가는 데 4초가 소요된다고 한다. 이 때, 자동차의 속력계가 반드시 90km/h를 적어도 한 번 나타냈음을 증명하여라.

증명 시간 t에서의 자동차의 위치를 $f(t)$라고 하면 $f(t)$는 폐구간 $[0,\ 4]$에서 연속이고, 개구간 $(0,\ 4)$에서 미분가능하므로 평균값의 정리로부터

$$\frac{f(4)-f(0)}{4-0}=\frac{100}{4}=25=f'(c)\quad(0<c<4)$$

를 만족하는 c가 존재한다.

이 때, $f'(c)$는 자동차의 속력이므로

$$f'(c)=25(\mathrm{m/s})=90(\mathrm{km/h})$$

를 나타내게 된다.

Example 5

You left home one morning and drove to a cousin's house 300 miles away, arriving 6 hours later. What does the Mean Value Theorem say about your speed along the way?

Barron's AP Calculus
p.61 #36

Mean value theorem

Your journey was continuous, with an average speed (the average rate of change of distance traveled) given by

$$\frac{\Delta\text{distance}}{\Delta\text{time}} = \frac{300 \text{ miles}}{6 \text{ hours}} = 50 \text{ mph}.$$

Furthermore, the derivative (your instantaneous speed) existed everywhere along your trip. The MVT, then, guarantees that at least at one point your instantaneous speed was equal to your average speed for the entire 6-hour interval. Hence, your car's speedometer must have read exactly 50 mph at least once on your way to your cousin's house.

Example 6

The function $f(x) = x^{2/3}$ on $[-8, 8]$ does not satisfy the conditions of the Mean Value Theorem because

(A) $f(0)$ is not defined **(B)** $f(x)$ is not continuous on $[-8, 8]$
(C) $f'(-1)$ does not exist **(D)** $f(x)$ is not defined for $x < 0$
(E) $f'(0)$ does not exist

Barron's AP Calculus
p.70 #39

Mean value theorem

정답 : (E)

Example 7

At how many points on the interval $[-5,5]$ is a tangent to $y = x + \cos x$ parallel to the secant line?

(A) none **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** more than 3

Barron's AP Calculus
p.75 #71

Mean value theorem

정답 : (D)

Average value of function

함수 $y = f(x)$가 폐구간 [*a*, *b*]에서 연속일 때, x에 대한 함수 $f(x)$의 평균값 M은 다음과 같이 구한다.

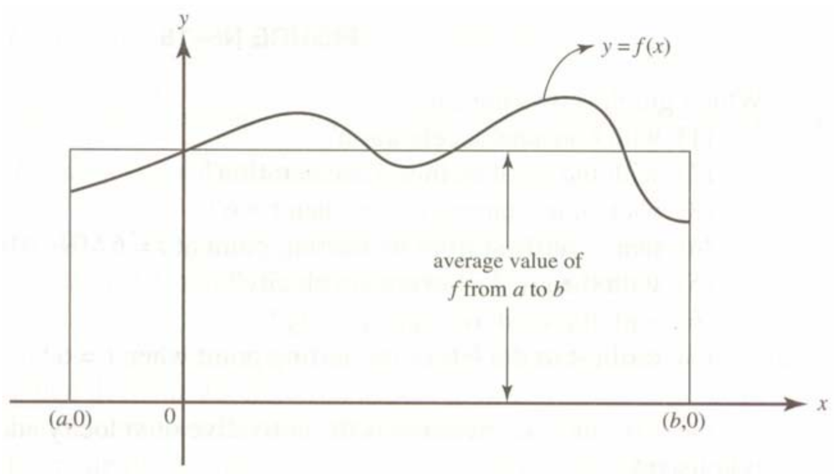
$$M = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

정적분에서의 평균값의 정리는 다음과 같다. 함수 $f(x)$ 가 폐구간 [*a*, *b*]에서 연속이면

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

를 만족하는 c가 폐구간 [*a*, *b*]안에 존재한다.

위의 식에서 우변을 폐구간 [*a*, *b*]에서의 함수 $f(x)$의 평균값이라고 정의한다.
함수의 평균값의 의미를 기하학적으로 살펴보면 아래그림과 같다.



함수 $f(x)$ 가 폐구간 [*a*, *b*]에서 연속이고 $f(x) > 0$ 이라면 함수의 평균값 $f(c)$는 $\int_a^b f(x)\,dx$ 와 넓이가 똑같고, 밑변의 길이가 $(b-a)$ 인 직사각형의 높이가 된다.

Example 7

구간 [−2, 2]에서 함수 $f(x)=\sqrt{4-x^2}$의 평균값을 구하여라.

대학새내기를 위한 수학기본서
p.200 #1

Average value of function

풀이 구간 [−2, 2]에서 함수 $f(x)$의 평균값은

$$M=\frac{1}{2-(-2)}\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$$

이 때, $x=2\sin\theta$로 놓으면 $dx=2\cos\theta d\theta$

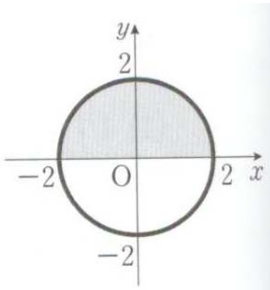
또, $x=-2$일 때 $\theta=-\frac{\pi}{2}$, $x=2$일 때 $\theta=\frac{\pi}{2}$

$$\therefore M=\frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4-4\sin^2\theta}\cdot 2\cos\theta d\theta$$

$$=\frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}4\cos^2\theta\,d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta$$

$$=\left[\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\left(\frac{\pi}{4}+0\right)-\left(-\frac{\pi}{4}+0\right)=\frac{\pi}{2}$$



Example 8

The average value of $f(x) = \ln x$ on the interval [1,4] is

Barron's AP Calculus
p. 201 #36

Average value of function

풀이

$$\frac{1}{4-1}\int_1^4 \ln x\,dx = \frac{1}{3}(x\ln x - x)\Big|_1^4 = \frac{4\ln 4-3}{3}$$

Example 9

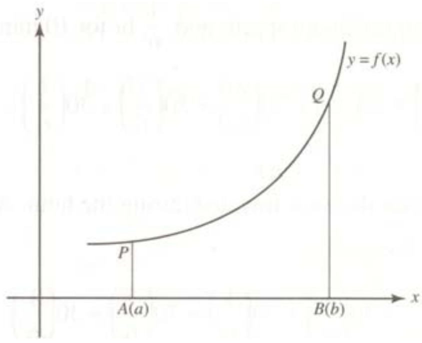
Barron's AP Calculus
p. 202 #39

Identify graph.

Identify each of the following quantities for the function $f(x)$, whose graph is shown in Figure (note: $F'(x) = f(x)$):

(a) $f(b) - f(a)$ (b) $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

(c) $F(b) - F(a)$ (d) $\frac{F(b)-F(a)}{b-a}$



(a) $f(b) - f(a) =$ length of RQ.

(b) $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{RQ}{PR}$ = slope of secant PQ.

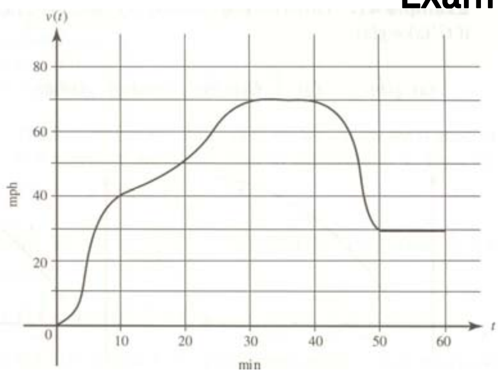
(c) $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$ = area of $APDQB$.

(d) $\frac{F(b)-F(a)}{b-a}$ = average value of f over $[a,b]$ = length of CD, where $CD \cdot AB$ or $CD \cdot (b-a)$ is equal to the area $F(b) - F(a)$.

Barron's AP Calculus
p. 203 #40

Motion along a curve.

Example 9



The graph in Figure shows the speed $v(t)$ of a car, in miles per hour, at 10-minute intervals during a 1-hour period.

(a) Give an upper and a lower estimate of the total distance traveled.
(b) When does the acceleration appear greatest?
(c) Estimate the acceleration when $t = 20$.
(d) Estimate the average speed of the car during the interval $30 \leq t \leq 50$.

정답 : (a) a lower estimate : $36\frac{2}{3}mi$, a upper estimate $55mi$

(b) $t = 5$

(c) $60mi/hr^2$

(d) $60mph$

2003 AP Calculus BC FREE-RESPONSE QUESTIONS (Form B)

A graphing calculator is required for some problems or parts of problems

Distance x (mm)	0	60	120	180	240	300	360
Diameter $B(x)$ (mm)	24	30	28	30	26	24	26

3. A blood vessel is 360 millimeters (mm) long with circular cross sections of varying diameter. The table above gives the measurements of the diameter of the blood vessel at selected points along the length of the blood vessel, where x represents the distance from one end of the blood vessel and $B(x)$ is a twice-differentiable function that represents the diameter at that point.

   (a) Write an integral expression in terms of $B(x)$ that represents the average radius, in mm, of the blood vessel between $x = 0$ and $x = 360$.

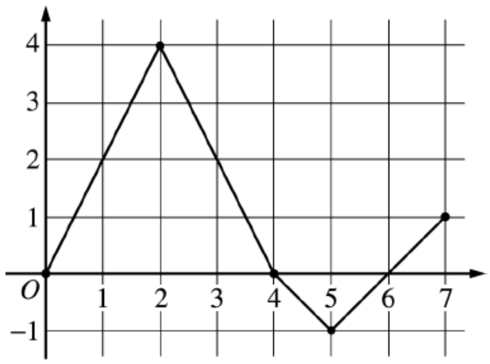
   (b) Approximate the value of your answer from part (a) using the data from the table and a midpoint Riemann sum with three subintervals of equal length. Show the computations that lead to your answer.

   (c) Using correct units, explain the meaning of $\pi \int_{125}^{275} \left(\frac{B(x)}{2} \right)^2 dx$ in terms of the blood vessel.

   (d) Explain why there must be at least one value x, for $0 < x < 360$, such that $B''(x) = 0$.

2003 AP Calculus BC FREE-RESPONSE QUESTIONS (Form B)

No Calculator is allowed for these problems.



Graph of f

5. Let f be a function defined on the closed interval $[0, 7]$. The graph of f, consisting of four line segments, is shown above. Let g be the function given by $g(x) = \int_2^x f(t)\, dt$.

   (a) Find $g(3)$, $g'(3)$, and $g''(3)$.

   (b) Find the average rate of change of g on the interval $0 \le x \le 3$.

   (c) For how many values c, where $0 < c < 3$, is $g'(c)$ equal to the average rate found in part (b) ? Explain your reasoning.

   (d) Find the x-coordinate of each point of inflection of the graph of g on the interval $0 < x < 7$. Justify your answer.

2004 AP Calculus BC FREE-RESPONSE QUESTIONS

No Calculator is allowed for these problems.

1. Traffic flow is defined as the rate at which cars pass through an intersection, measured in cars per minute. The traffic flow at a particular intersection is modeled by the function F defined by

$$F(t) = 82 + 4\sin\left(\frac{t}{2}\right) \text{ for } 0 \le t \le 30,$$

where $F(t)$ is measured in cars per minute and t is measured in minutes.

(a) To the nearest whole number, how many cars pass through the intersection over the 30-minute period?

(b) Is the traffic flow increasing or decreasing at $t = 7$? Give a reason for your answer.

(c) What is the average value of the traffic flow over the time interval $10 \le t \le 15$? Indicate units of measure.

(d) What is the average rate of change of the traffic flow over the time interval $10 \le t \le 15$? Indicate units of measure.

2004 AP Calculus BC FREE-RESPONSE QUESTIONS (Form B)

No Calculator is allowed for these problems.

5. Let g be the function given by $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

(a) Find the average value of g on the closed interval $[1, 4]$.

(b) Let S be the solid generated when the region bounded by the graph of $y = g(x)$, the vertical lines $x = 1$ and $x = 4$, and the x-axis is revolved about the x-axis. Find the volume of S.

(c) For the solid S, given in part (b), find the average value of the areas of the cross sections perpendicular to the x-axis.

(d) The average value of a function f on the unbounded interval $[a, \infty)$ is defined to be $\lim_{b\to\infty}\left[\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}\right]$. Show that the improper integral $\int_4^\infty g(x)\,dx$ is divergent, but the average value of g on the interval $[4, \infty)$ is finite.

News letter 를 보내고
기출문제 답을 "안"보내도
아무도 문의가 없군요.
=.=

서울대 자연계열논술문제는
AP Calculus 수업을 들은
여러분은 쉽게 풀 수 있습니다.

이번에도 기출문제 답은
나중에 보내드립니다.
과연 누가 풀고 답을 보낼지
지켜보겠습니다.

We're on the Web!
See us at:
http://apcalculus.tistory.com

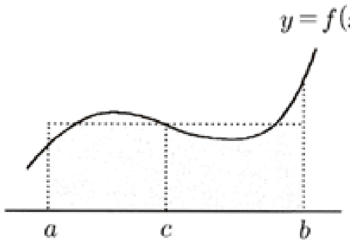
서울대 자연계열 논술 문제

【문항 4】

※ 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

(가)

폐구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 f에 대하여 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c)$ 를 만족하는 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다는 사실이 잘 알려져 있다. 이를 '적분에 관한 평균값의 정리'라고 한다. 이것은 폐구간 $[a, b]$에서 $f(x) \geq 0$ 일 때, 곡선 $y = f(x)$와 x축 및 두 직선 $x = a$, $x = b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이가 밑변의 길이가 $b-a$이고 높이가 $f(c)$인 직사각형의 넓이와 같다는 것을 의미한다.



[그림 1]

⋮

논제 1. 적분에 관한 평균값의 정리를 이용하여 도함수 f'이 폐구간 $[a, b]$에서 연속이면

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

를 만족하는 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다는 것을 설명하시오.

논제 2. 함수 $f(x) = x^3$에 대하여 폐구간 $[1, 2]$에서 논제 1의 등식을 만족하는 c의 값을 구하시오.

AP Calculus 뉴스레터에 대해…

- 본 뉴스레터는 AP Calculus 수강생의 개념 재확인 및 기출문제 풀이를 위해 제작되었습니다.
- 기출문제 정답 및 풀이는 1 월 7 일 발송됩니다. (답이 미리 필요한 분은 메일이나 전화로 연락바랍니다.)
- 내용 및 문제에 대한 질문은 email 및 블로그를 이용해 주시기 바랍니다.

EGO Expert Group

경기도 성남시 분당구 수내동 로얄팰리스 하우스빌 B2705
e-mail : ego.expertgroup@gmail.com
blog : http://apcalculus.tistory.com