기계 운동학
(동역학, DYNAMICS)

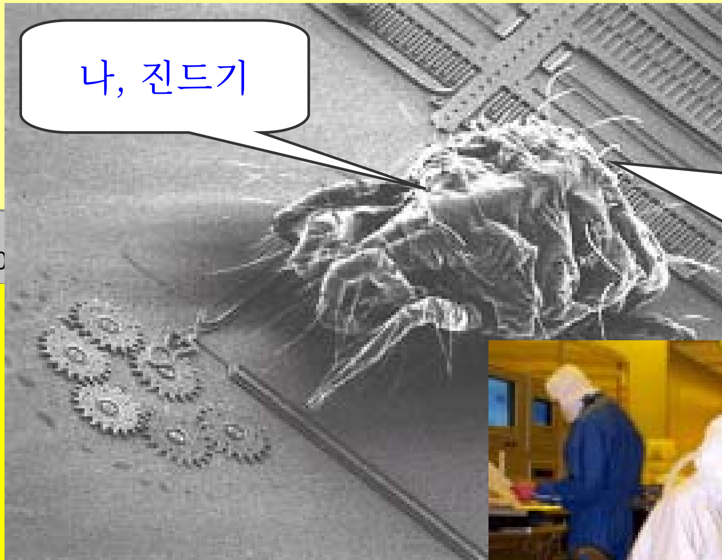
담당 교수 : 박 준협

개발관 309호, T. 610 - 8362

E-mail : jhyubpark@korea.com
jhpark@tu.ac.kr

MEMS 및 기계 구조물 신뢰성 연구 분야

❑ NANO 및 MEMS Device 설계 및 개발

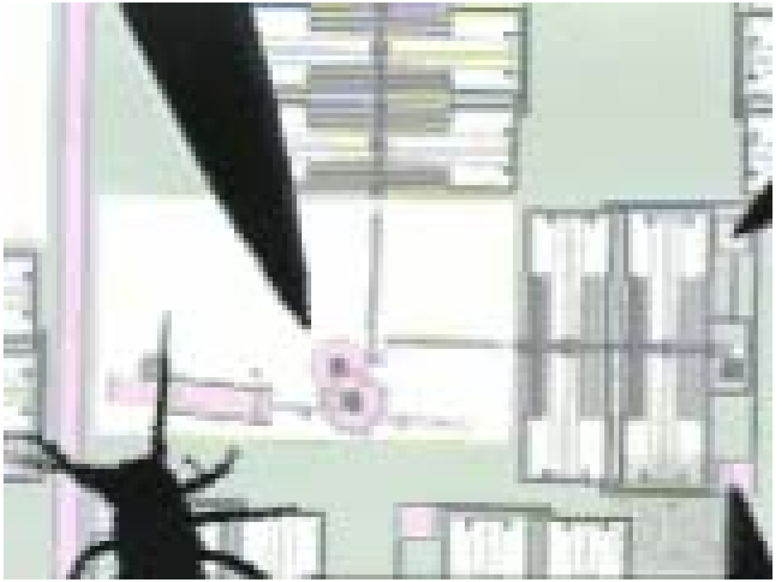


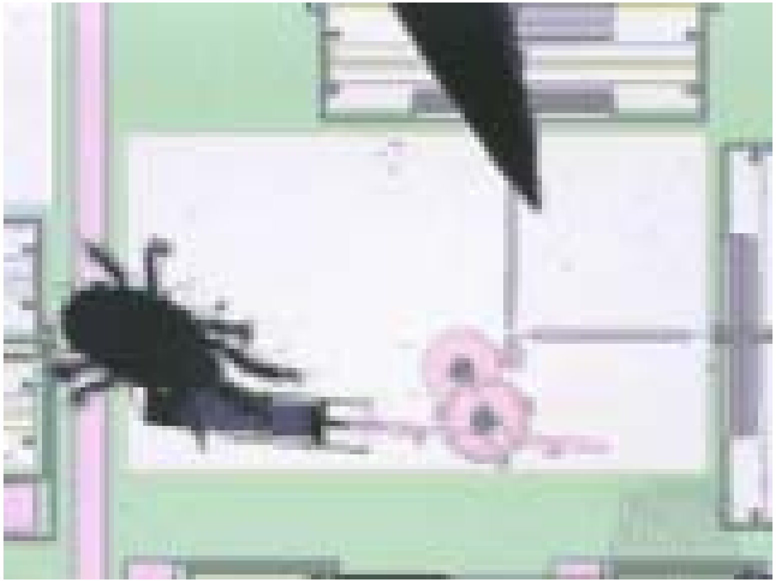
와 우, 나보다 작은 기어 장치가 있네.
그럼 이런 기술로
- 사람 몸 속을 돌아 다니는 로봇
- 첩보용 무인 로봇
- 휴대용 질병(암, 당뇨 등) 진단 장치
- 미래 자동차에 필요한 각종 센서

들을 만들 수 있겠네.

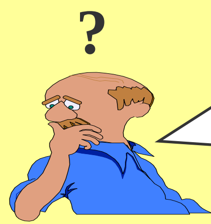
맞아, 앞으로 거의 모든 공업 제품에는 지금의 반도체와 함께 **NANO 나 MEMS 기술**로 만든 부품이 들어 갈 거야.

출처 : SPC, NEXUS,삼성경제연구소

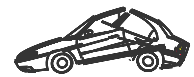




❑ 수송기계(자동차, 항공기, 선박 등) 및 기계 구조물 내구 설계



우리 회사가 만든 차가 10년 동안
고장 없이 30만km를 달릴 수 있을 까 ?



우리는 시험을 통해서 30만km을 달릴 수 있는지 알아 봅시다.

- 하중 측정
- 재료물성 시험
- 재현 시험 등

우리는 컴퓨터를 이용해서 30만km을 달릴 수 있는 지 알아 봅시다.

- 피로수명예측
- 구조 해석 등

교 재

✓ 주 교재 : SI 동역학

Engineering Mechanics: Dynamics (2nd Edition)

Andrew Pytel & Jaan Kiusalaas 공저, Brooks/Cole Pub. Co.

(김동조, 박종근, 백운경, 양보석, 윤한익 공역, 인터비젼)

✓ 부 교재 :

- ✓ A.Boresi & R. Schmidt, Engineering Mechanics: Dynamics, 김종완외 9인, 시그마프레스
- ✓ Beer & Johnston Vector-Dynamics, McGraw-Hill, 이장무 역, Vector-동역학, 희중당
- ✓ A. Bedford & W. Fowler, Engineering Mechanics : Dynamics, New York, Addison-Wesley
- ✓ W.F. Riley & L.D. Sturges, Engineering Mechanics: Dynamics, 김성원외 2인, 사이텍미디어
- ✓ A.G. Erdman & G.N. Sandor, Mechanism Design, New Jersey, Prentice-Hall International

평가 방법

- ✓ 중간 고사 : 30
- ✓ 기말 고사 : 30
- ✓ 출 석 : 10
- ✓ 수시 평가 : 30

역학 이란 ?

1.1 역학이란 무엇인가?

역학(mechanics) : 힘이 작용하고 있는 물체의 정지 또는 운동상태를 묘사하고 예측하는 과학

Mechanics is the science that considers the m
of bodies under

Statics is the study of motionless systems or systems that move with a constant velocity.

- 역학 (Mechanics)
  - 강체 역학 (Mechanics of rigid bodies)
    - 정 역학 (statics)
    - 동 역학 (dynamics)
  - 변형체 역학 (Mechanics of deformable bodies)
    - 재료역학 (mechanics of materials)
  - 유체 역학 (Mechanics of fluids)
    - 압축성 유체 (compressible fluids)
    - 비압축성 유체 (incompressible fluids)

1.2 기본 개념과 원리

기본 개념

공간(space) : . 위치와 관계
. 어느 특정한 기준점 또는 원점으로부터 세 방향으로 측정된 세 개의 길이에 의해서 정의

시간(time) : . 어느 한 현상을 정의하기 위해서는 공간상에서 위치만으로 정의하는 것이 충분하지 않으며 시간도 주어져야 한다

질량(mass) : . 몇 가지 기본적인 역학 실험을 기초로 하여 물체의 특징을 나타내거나 비교하는 데 사용

힘(force) : . 하나의 물체가 다른 물체에 미치는 작용
. 작용하는 점, 그 크기 및 작용방향

1.2 기본 개념과 원리

기본 개념

질점(particle) : 공간상에서 한 점을 차지하는 매우 작은 양의 물질 또는 그것의 크기가 작용하는 힘의 영향을 받지 않는 점물체

강체(rigid body) : 상호간에 고정된 위치를 가지고 있는 많은 양의 질점들의 결합체 또는 힘에 의해 변형되지 않는 물체이다. 일반적으로 강체의 크기는 힘에 의해서 영향을 받지 않는다

제 11장 동역학 소개

11.1 서 론

- **고전적인 동역학**

  : 뉴턴과 오일러에 의해 제안된 원리를 이용하여, 물체의 운동에 대하여 연구하는 학문

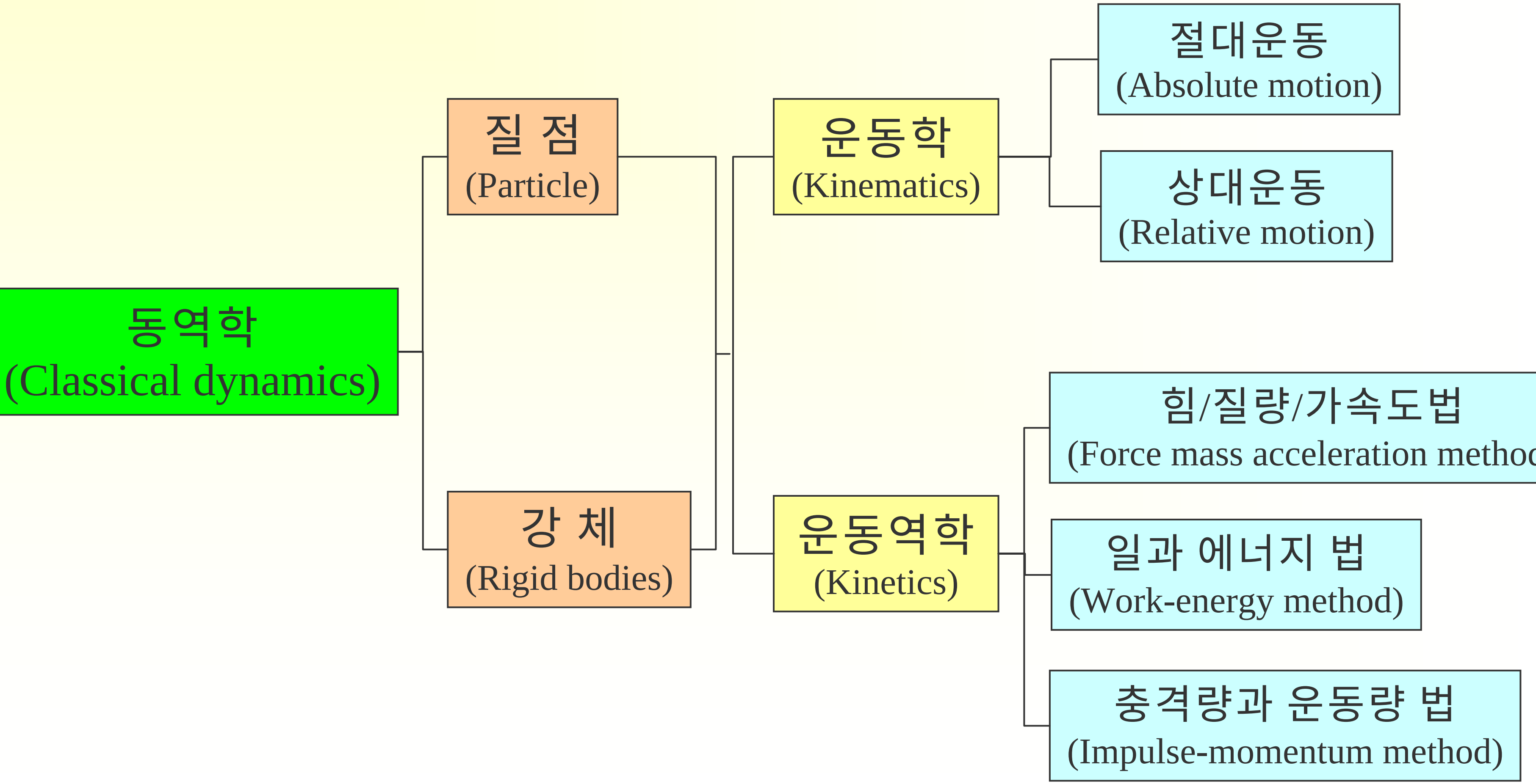
* 질 점 : 하나의 점으로 간주되며, 질량은 가지지만 크기가 없는 것으로 간주
* 강 체 : 어떤 물체가 변형되지 않고 물체상의 임의 두점 사이의 거리가 일정하게 유지되는 것

1) 운동학(kinematics) : 운동의 기하학적 연구, 운동의 원인에는 관심은 두지 않는다.

- ✓ 절대 운동 : 고정된 좌표계를 기준으로 운동을 표현
- ✓ 상대 운동 : 움직이는 좌표계에 대한 운동의 표현

2) 운동역학(kinetics) :

- ✓ 힘/질량/가속도 법 : 질량에 작용하는 힘과 가속도에 관한 뉴턴/오일러 운동법칙 이용
- ✓ 일과 에너지 법 : 뉴턴/오일러 운동법칙의 적분 형태
- ✓ 충격량과 운동량 법 : 뉴턴/오일러 운동법칙의 적분 형태


동역학
(Classical dynamics)
질 점
(Particle)
강 체
(Rigid bodies)
운동학
(Kinematics)
운동역학
(Kinetics)
절대운동
(Absolute motion)
상대운동
(Relative motion)
힘/질량/가속도법
(Force mass acceleration metho
일과 에너지 법
(Work-energy method)
충격량과 운동량 법
(Impulse-momentum method)

- **Problem Solving in Dynamics**
  1. Newton's laws (Force-Mass-Acceleration method)
  2. Work and energy methods
  3. Impulse and momentum methods

- **Differences between Statics and Dynamics**
  1. Time-varying nature of the loading (dynamic loading)
  2. Role played by accelerations (inertia force)

- **Advanced Dynamics**
  1. Structural Dynamics (구조동역학)
  2. Machine Dynamics (기계동역학)
  3. Vehicle Dynamics (차량동역학)
  4. Soil Dynamics (토질동역학)
  5. Ice Dynamics (얼음 동역학)

- **Why dynamics must be considered in the design?**

  - All machines are subjected to dynamic loading
  - Dynamic means time-varying
  - Dynamic load (magnitude, direction, or point of application) varies with time
    1) Periodic excitation
    2) Aperiodic excitation (step, impulse, ramp)
    3) Random excitation (earthquake)
  - Dynamic response constitute the resulting time-varying deflections, vibrations and stresses, etc.
  - Safety, performance and reliability of machines
  - Need for extensive analysis and testing to determine their response to dynamic loading

11.2 벡터 함수의 도함수

$$\Delta A = A(u+\Delta u) - A(u)$$

$$\frac{dA}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{A(u+\Delta u) - A(u)}{\Delta u}$$

$$\frac{dy}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{y(u+\Delta u) - y(u)}{\Delta u}$$

$$\frac{d(mA)}{du} = m\frac{dA}{du} + \frac{dm}{du}A$$

$$\frac{d(A+B)}{du} = \frac{dA}{du} + \frac{dB}{du}$$

$$\frac{d(A \cdot B)}{du} = A \cdot \frac{d\mathbf{B}}{du} + \frac{dA}{du} \cdot B$$

$$\frac{d(A \times B)}{du} = A \times \frac{d\mathbf{B}}{du} + \frac{dA}{du} \times B$$

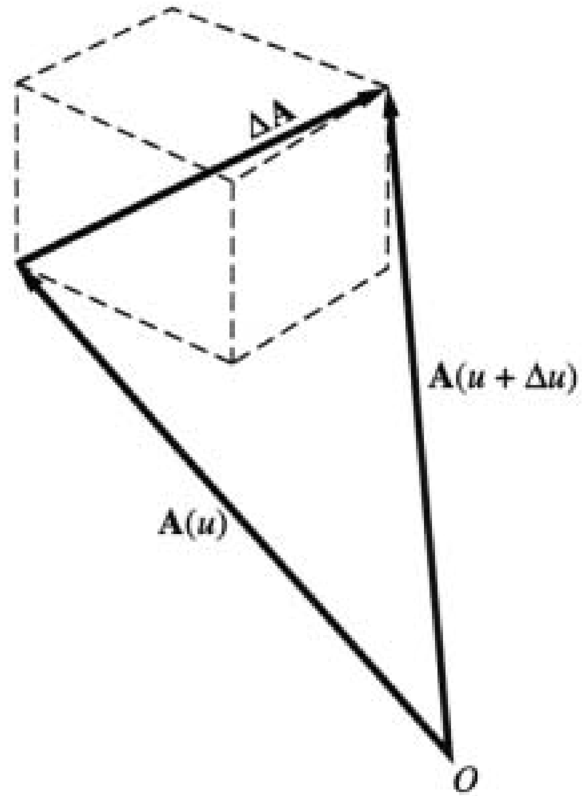


Fig. 11.2

11.3 질점의 위치, 속도 및 가속도

a. 위 치

$$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)$$

$$\Delta s = s(t+\Delta t) - s(t)$$

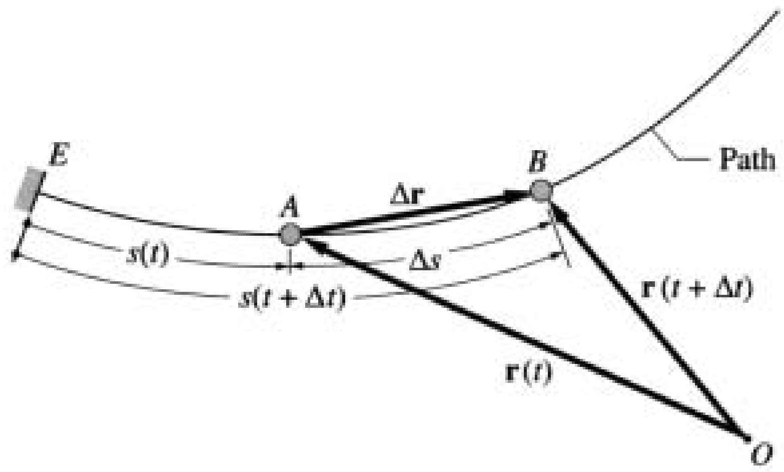


Fig. 11.3

11.3 질점의 위치, 속도 및 가속도

b. 속 도

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \dot{\vec{r}}(t)$$

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \dot{s}(t)$$

c. 가 속 도

$$\Delta \vec{v}(t) = \vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)$$

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$$

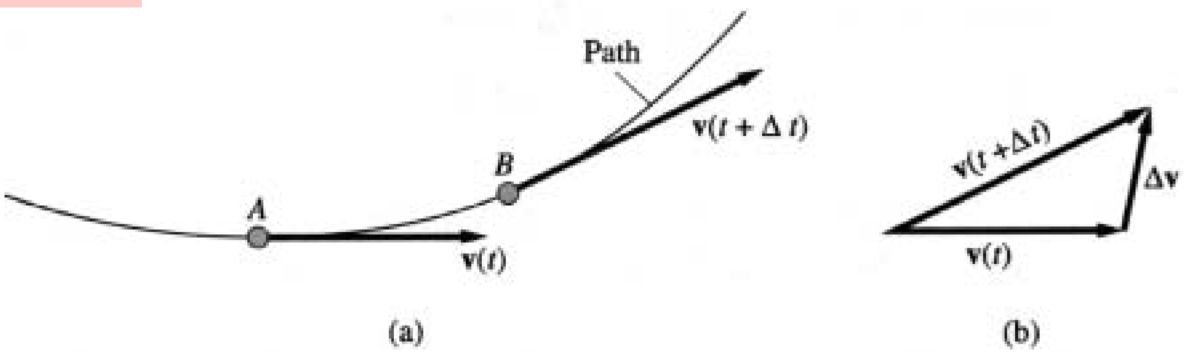


Fig. 11.4

11.4 뉴턴 역학

❑ 질점의 운동법칙 : **Isaac Newton(1642-1727), The Principia(1687)**

- 제 1법칙 (관성법칙):

작용하는 외력이 없을 때, 원래 정지해 있던 질점은 정지해있고 일정 속도로 움직이는 질점은 직선을 따라서 일정하게 움직이게 된다.

- 제 2법칙 (가속도법칙):

만일 질점에 한 외력이 작용하면, 질점은 힘의 작용방향으로 가속되며, 가속도의 크기는 힘의 크기에 비례하고 질점의 질량에 반비례한다.

- 제 3법칙 (작용 반작용 법칙):

모든 작용력에 대해 반드시 크기가 같고 방향이 반대인 반작용력이 있다. 접촉하는 두 물체사이의 작용 및 반작용은 크기가 같고 방향은 반대이며 동일 직선상에 있다.

❑ 강체계에의 확장: Leonhard Euler(1707-1783), 관성모멘트의 개념 도입

역학에 이용되는 기본 양과 용어 정의

- 역학의 기본 양 : 공간, 시간, 질량, 힘
- 용어 정의 :

1) **공간(space)** : 기하학적 영역, 모든 방향으로 무한히 확장 가능

2) **시간(time)** : 2개 사건(event)사이의 간격

3) **질량(mass)** : 물체의 운동변화에 대한 저항의 크기를 양으로 나타낸 값

4) **힘(force)** : 한 물체가 다른 물체에 대한 작용(action)을 의미

5) **관성(inertia)** : 운동의 변화에 저항을 일으키는 물질의 성질

6) **물질(matter)** : 공간을 차지하는 어떤 실체(substance)를 의미

- 절대 양과 상대 양

1) **절대 양** : 서로 독립적이고 다른 양으로 표현 불가능(공간, 시간, 질량)

2) **종속 양** : 절대 양들과 종속적, 이들에 의해 표현 가능(예, 힘)

단위 및 차원

- **차원(dimensions)** : 사용되는 단위에 관계없이 측정의 형식을 언급
  1) SI 단위계 (기본 차원) ; 질량 [M], 길이 [L], 시간 [T]
  2) US 단위계 (기본 차원) ; 힘[F], 길이 [L], 시간 [T]
     예) 질량 [M] = [FT2/L] , 힘 [F] = [ML/T2]

- 단위(units) : 측정의 표준(standards)

1) 기본 단위

(1) SI 단위계 (절대단위계) ; 질량(kg), 길이(m), 시간(s)

(2) US 상용단위계 (중력단위계) ; 힘(lb), 길이(ft), 시간(s)

2) 유도 단위

예) 힘 (F = m g) ; 1 N = 1kg ×1 m/s^2

에너지(W = F· s) ; 1 J = 1 N· m

문제 풀이 방법

- 역학의 원리는 비교적 단순, 소수, 응용방법은 무한, 복잡, 다양
- 성공적인 문제해결 : 잘 훈련된 문제풀이 방법과 절차에 크게 의존
  1) 복잡한 문제의 간단한 문제로 단순화하는 능력
  2) 결과를 명확하고 논리적으로 표현하는 능력

❑ 문제 풀이의 절차

❖ **물리적 모델링 : 문제의 정의 및 확인**

(1) 물체에 작용하는 외력의 영향의 해석이 주관심
(2) 물체에 작용하는 모든 외력 확인 : 관심대상의 물체를 다른 물체로부터 분리, 모든 외력을 자유물체도에 그림으로 표시하여 확인
(3) 자유물체도는 원인(외력계)과 결과(물체의 운동)사이의 관계를 규명

❖ **수학적 모델링(정식화) : 원인과 결과사이의 관계식을 수학적인 형태로 표현**

(1) 적절한 원리와 방정식을 적용하여 관계식을 구성
(2) 모델설정에 근사화 및 단순화의 가정이 필요, 예) 강체로 간주
(3) 복잡한 문제의 단순화의 결과는 정성적으로 매우 유용

❖ **운동해석 : 운동방정식의 풀이 및 결과 분석**

(1) 중요한 그림과 적절한 단위를 이용하여 결과를 얻는다
(2) 결과를 검토, 합리적인 결과인지를 조사

제 12장 질점 동역학: 직각좌표계

강의 개요 :

이 장에서는 질점의 운동학(kinematics)과 운동역학(kinetics)을 학습하기위해, 하나의 질점에 대해 움직이지 않는 직각좌표계(고정좌표계)를 이용하여 설명한다.

기본적인 운동 변수인 위치, 속도 및 가속도를 직각좌표계를 이용하여 표현하는 방법을 나타내고, 힘과 운동과의 관계를 나타내는 운동방정식을 유도하는 과정을 설명한다.

12.1 서 론 : 직각좌표계

- 질점의 운동을 기술할 때, 질점이 어디에 있는가 또는 그 질점의 위치가 어디인가를 표현하는 것이 필요
- 질점의 위치는 합의된 기준 프레임, 즉 어떤 기준 좌표계로 정의
  1) 좌표의 원점은 점의 위치를 측정하는 합의된 기준
  2) 좌표축은 측정이 이루어지는 합의된 방향을 제공(각도를 정의)
  3) 각 축의 단위길이는 거리를 정량화하는 척도를 제공

- 좌표계의 종류

1. 직각(직교) 좌표계 (rectangular Cartesian coordinate system)

1) 2개의 서로 직각인 축을 이용하여 한 질점의 위치를 표시

2) 2차원 좌표계(x 및 y축 ; 평면좌표), 3차원 좌표계(x, y 및 z축; 공간좌표)

3) 고정, 이동 및 회전 직교좌표계

2. 곡선 좌표계(curvilinear coordinate system)

1) 경로 좌표(path coordinates) : 법선 및 접선좌표

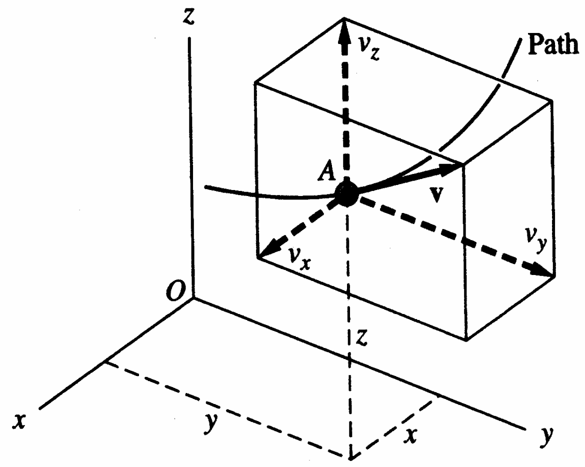
2) 극 좌표(polar coordinates) : 반경 및 횡좌표

3) 원통 좌표(cylindrical coordinates)

12. 2 운동학 : 위치, 속도 및 가속도의 정의

✓ **1. 질점의 위치벡터**

$$\mathbf{r}(t) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$$

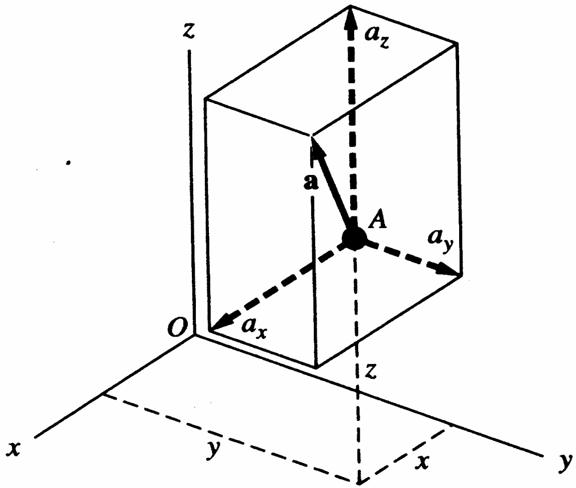


✓ **2. 질점의 속도벡터**

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$$
$$= x\frac{d\mathbf{i}}{dt} + \dot{x}\mathbf{i} + y\frac{d\mathbf{j}}{dt} + \dot{y}\mathbf{j} + z\frac{d\mathbf{k}}{dt} + \dot{z}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{v} = v_x\,\mathbf{i} + v_y\,\mathbf{j} + v_z\,\mathbf{k}$$

$$v_x = \dot{x} \quad v_y = \dot{y} \quad v_z = \dot{z}$$



✓ **3. 질점의 가속도벡터**

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}) = \dot{v}_x\mathbf{i} + \dot{v}_y\mathbf{j} + \dot{v}_z\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a} = a_x\,\mathbf{i} + a_y\,\mathbf{j} + a_z\,\mathbf{k}$$

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} \quad a_y = \dot{v}_y = \ddot{y} \quad a_z = \dot{v}_z = \ddot{z}$$

a. 평면운동

✓ *x y* 평면에서 2차원 평면운동의 경우 ($z = 0$)

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} \qquad \mathbf{v} = v_x\,\mathbf{i} + v_y\,\mathbf{j} \qquad \mathbf{a} = a_x\,\mathbf{i} + a_y\,\mathbf{j}$$

✓ *x, y* 축방향 성분 :

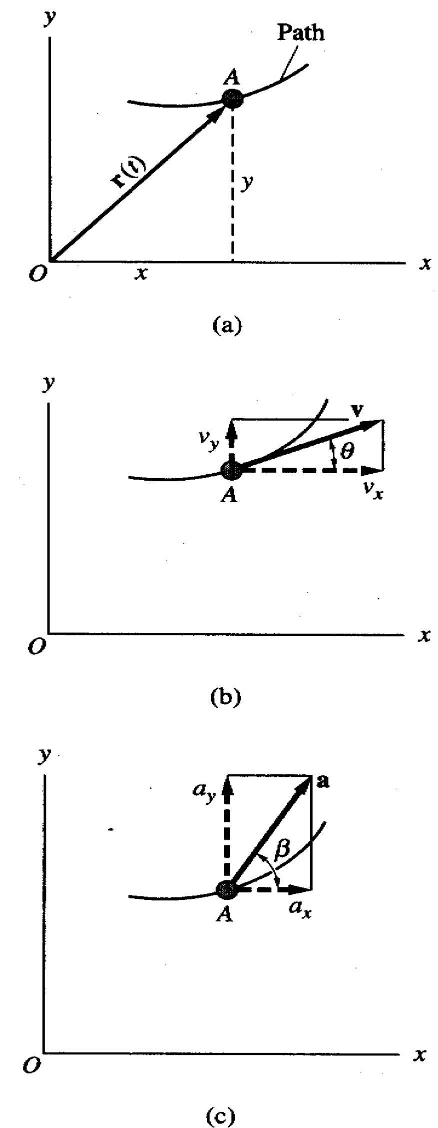
$$v_x = \dot{x} \qquad v_y = \dot{y}$$

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} \qquad a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}$$

✓ 속도 및 가속도의 방향 :

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{dy}{dx}$$

$$\tan\beta = \frac{a_y}{a_x} = \frac{d^2y/dt^2}{d^2x/dt^2}$$



b. 직선운동

✓ 운동경로가 직선인 운동(1차원운동)

✓ 운동벡터는 경로를 따르므로 첨자 구별 불필요(스칼라 양 취급)
(x축 방향 운동으로 간주)

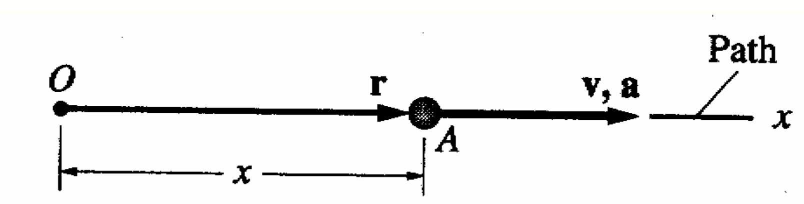
$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} \qquad \mathbf{v} = v\,\mathbf{i} \qquad \mathbf{a} = a\,\mathbf{i}$$

$$v = \dot{x} \qquad a = \dot{v} = \ddot{x}$$

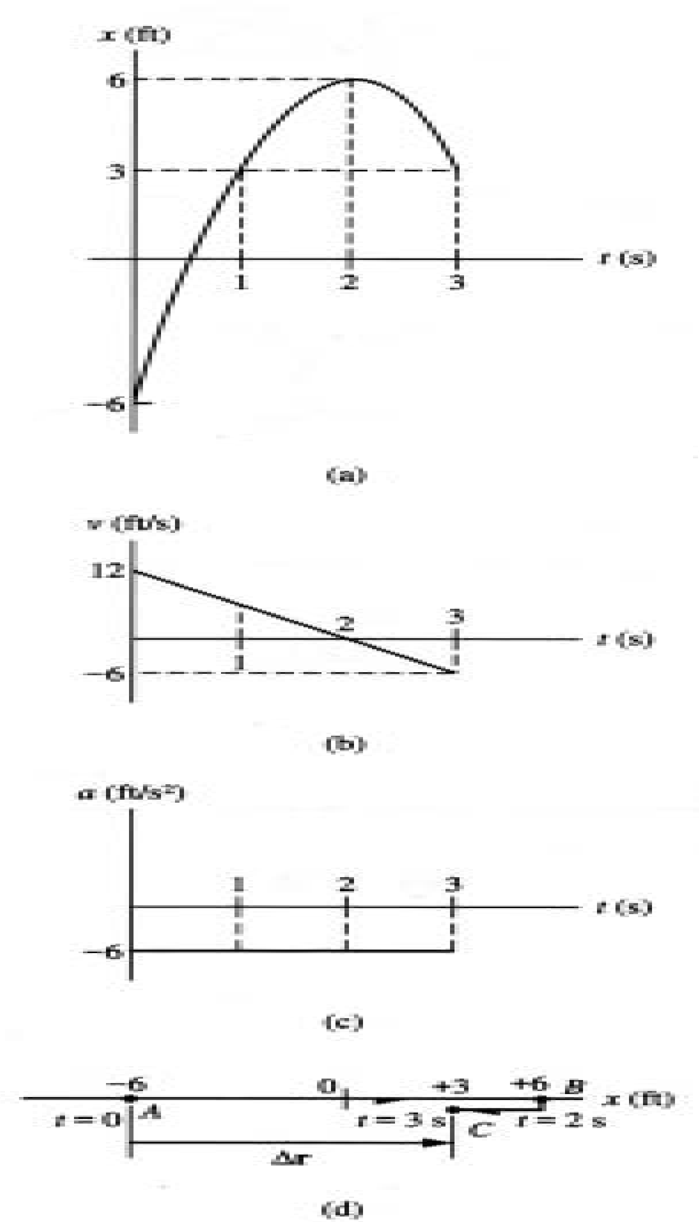
✓ 가속도의 다른 표현 (미분 연쇄법칙)

$a = dv/dt = (dv/dx)(dx/dt), \quad dx/dt = v$

$$a = v\frac{dv}{dx}$$



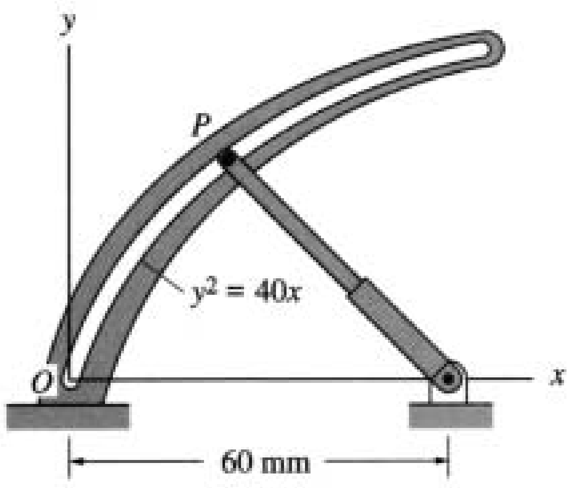
예제 12. 1



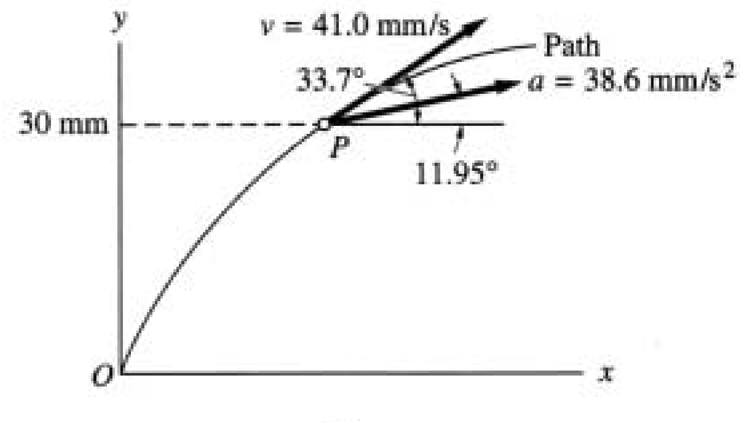
$x = -3t^2+12t-6$ m

t=0, 3 sec

예제 12. 2



(a)



(b)

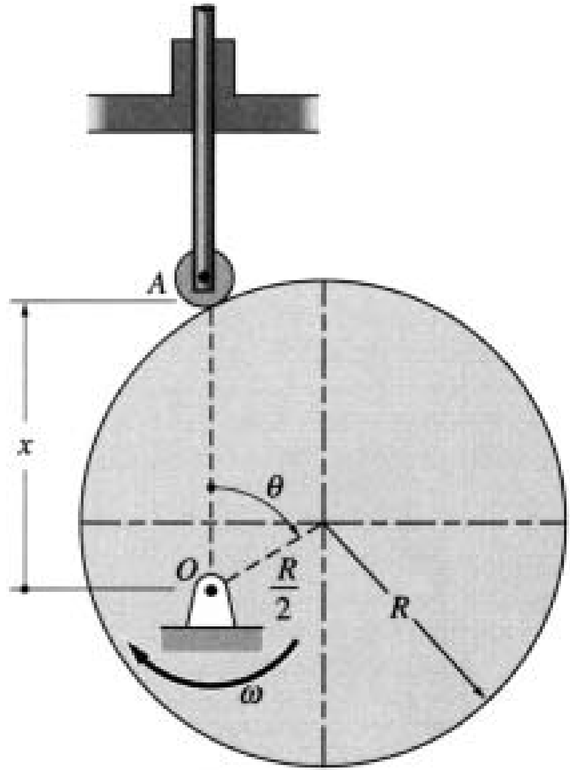
$y = 4t^2 + 6t$ mm, when $y = 30$ mm

예제 12. 3

$x=R\cos(\omega t)$, $y=R/2\sin(2\omega t)$, $z=R\sin^2(\omega t)$,

예제 12. 4

R = 16 mm



12.3 질점 동역학 : 힘-질량-가속도법

- **운동방정식 :** $\sum F_x = ma_x \quad \sum F_y = ma_y \quad \sum F_z = ma_z$
- **자유물체도(FBD)와 질량가속도선도(MAD) :** 두 선도는 정적으로 등가

  FBD : 질점에 작용하는 모든 힘을 표시

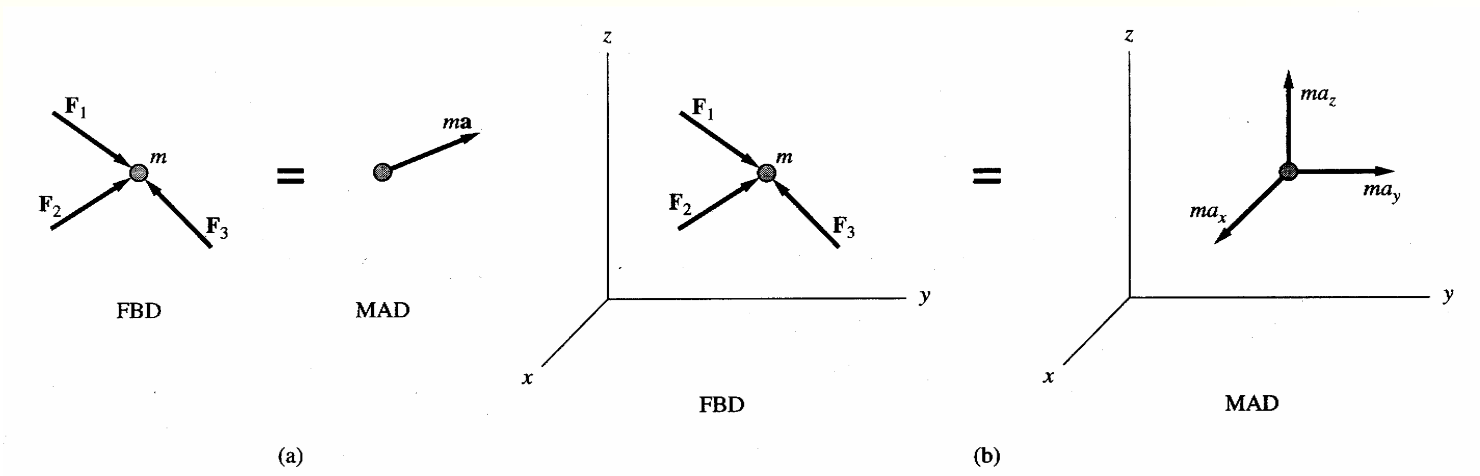
  MAD : 질점의 관성벡터 *m***a**를 표시
- **운동해석의 기본 4단계**

✓ 1단계 : 질점에 작용하는 모든 힘을 나타내는 FBD을 작성

✓ 2단계 : 질점의 가속도를 해석하는 운동학을 이용

✓ 3단계 : 2단계를 이용하여 MAD를 작성

✓ 4단계 : 두 선도의 정적 등가성을 이용, 힘과 가속도의 관계를 표현



12. 4 질점 동역학 : 직선운동의 동역학(1)

- **운동방정식 :**

$$\sum \mathbf{F}_x = ma \qquad \sum \mathbf{F}_y = \sum \mathbf{F}_z = 0$$

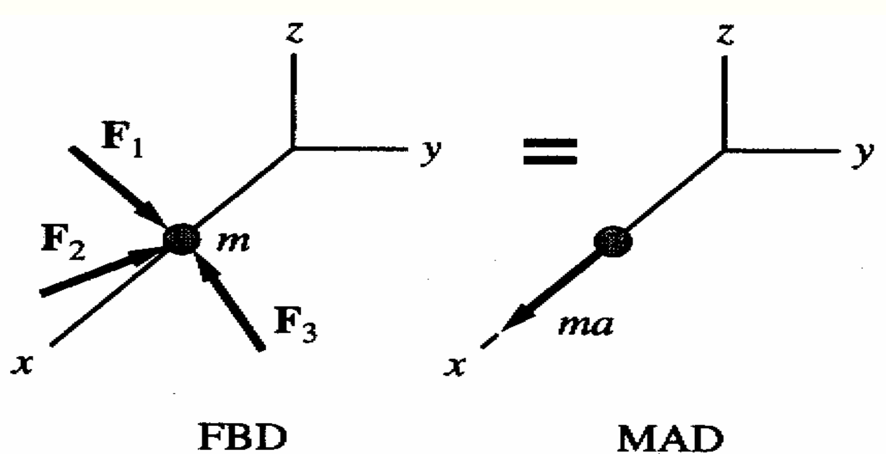
- **속도와 위치의 결정 :** 질점 위치가 임의이므로, 가속도는 위치, 속도 및 시간의 함수

가속도 : $a = f(v, x, t)$

- **등가 가속도 :** 2계 상미분방정식, 해는 시간함수의 위치 $x(t)$

f 가 3변수 (x, v, t)의 함수이면, 해석적으로 풀이가 불가능, 수치적 해법 이용

$$\ddot{x} = f(\dot{x}, x, t)$$



12. 4 질점 동역학 : 직선운동의 동역학(2)

✓ 함수 f 가 단 하나의 변수만을 포함하는 특별한 경우

1. Case I : $a = f(t)$인 경우, $a = dv/dt$ 에서

$$dv = a(t)dt \qquad v(t) = \int a(t)\,dt + C_1$$

위치좌표 x는 $v = dx/dt$ 또는 $dx = v(t)\,dt$ 로부터

$$x(t) = \int v(t)\,dt + C_2$$

적분상수 C_1, C_2는 초기조건[$t = 0$; $x(0)$, $v(0)$] 으로부터 결정

2. Case II : $a = f(x)$인 경우, $a = v\,dv/dx$에서 변수분리 표현

$$v\,dv = a(x)\,dx \qquad \frac{1}{2}v^2 = \int a(x)\,dx + C_3$$

$$v(x) = \sqrt{2\left[\int a(x)\,dx + C_3\right]}$$

12.4 질점 동역학 : 직선운동의 동역학(3)

✓ 함수 *f* 가 단 하나의 변수만을 포함하는 특별한 경우

3. Case III : $a = f(v)$인 경우

$v\,dv = a(x)\,dx$ 로 부터 $a(x)$ 대신 $a(v)$를 대입하면

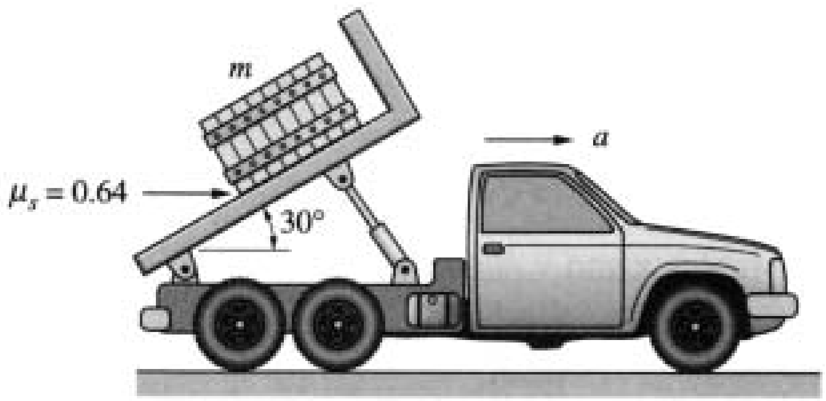
$$v\,dv = a(v)\,dx$$

$$dx = \frac{v\,dv}{a(v)} \qquad x(v) = \int \frac{v\,dv}{a(v)} + C_4$$

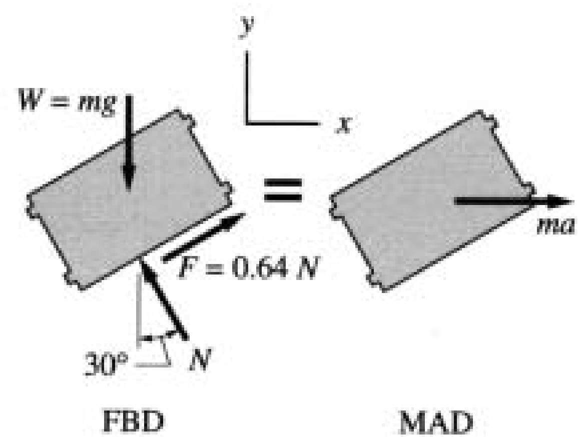
다른 방법으로 $dv = a(v)\,dt$ 의 관계를 이용하여 변수분리하면

$$dt = \frac{dv}{a(v)} \qquad t(v) = \int \frac{dv}{a(v)} + C_5$$

예제 12. 5

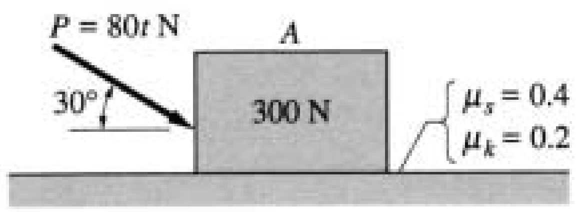


(a)

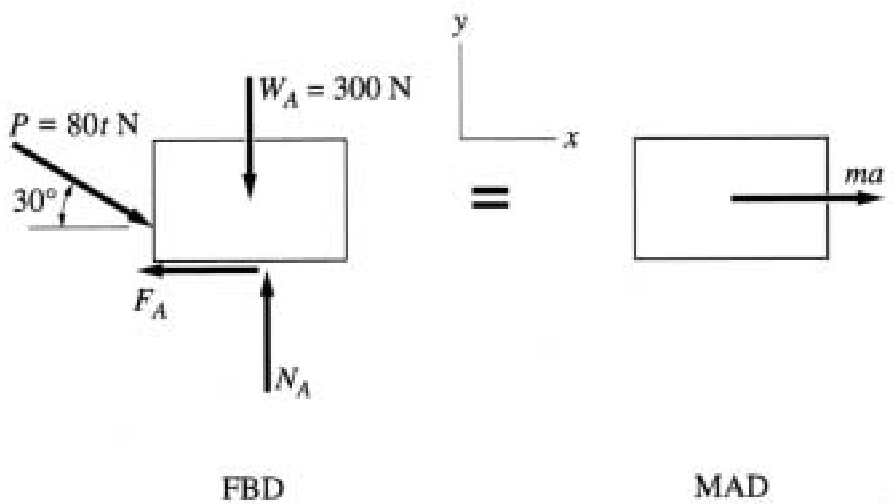


(b)

예제 12. 6

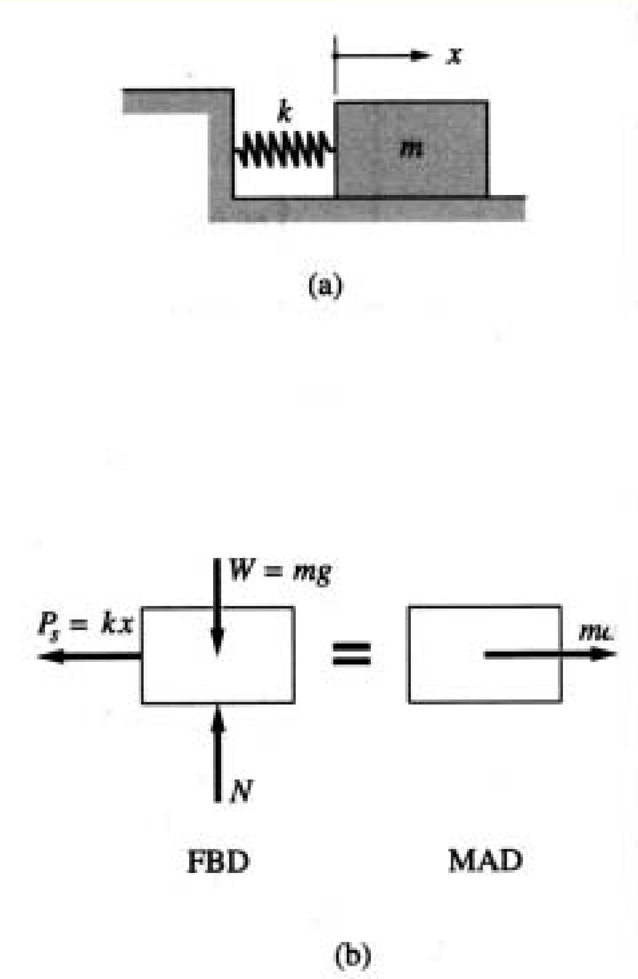


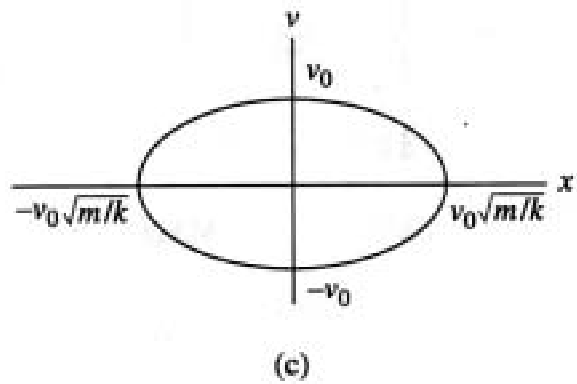
(a)



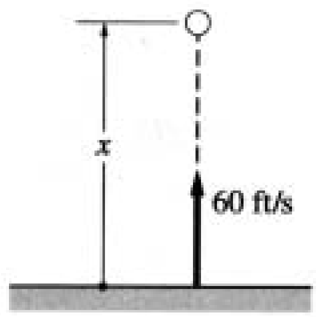
(b)

예제 12. 7

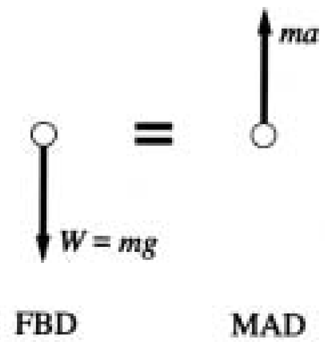




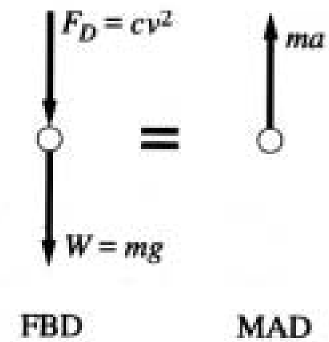
예제 12. 8



(a)



(b)



(c)

12. 5 질점 동역학 : 직선운동의 중첩

✓ 각 좌표방향의 운동이 독립적인 직선운동을 하는 경우에 중첩이 가능

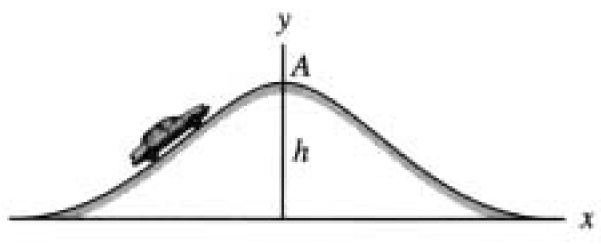
$$a_x = f_x(v_x, x, t) \quad a_y = f_y(v_y, y, t) \quad a_z = f_z(v_z, z, t)$$

✓ 식의 특징 :

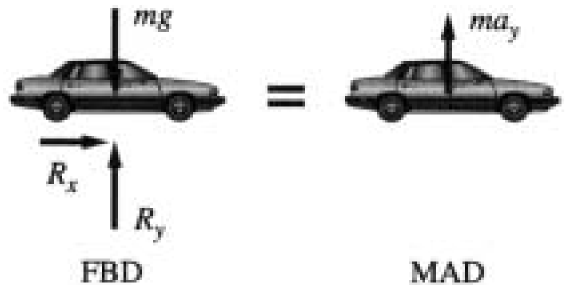
1. 어느 한 방향의 가속도가 다른 두 방향의 운동과 독립적
2. 비연성(uncoupled) 운동
3. 독립적인 x, y 및 z 방향의 직선운동
4. 각각의 방향에 대해 구하고, 서로 더한다(중첩)
5. 예로 $x\,y$ 평면에서 독립된 두 운동: 일정 중력장에서 발사체 운동

   예제 12.10 참조

예제 12. 9

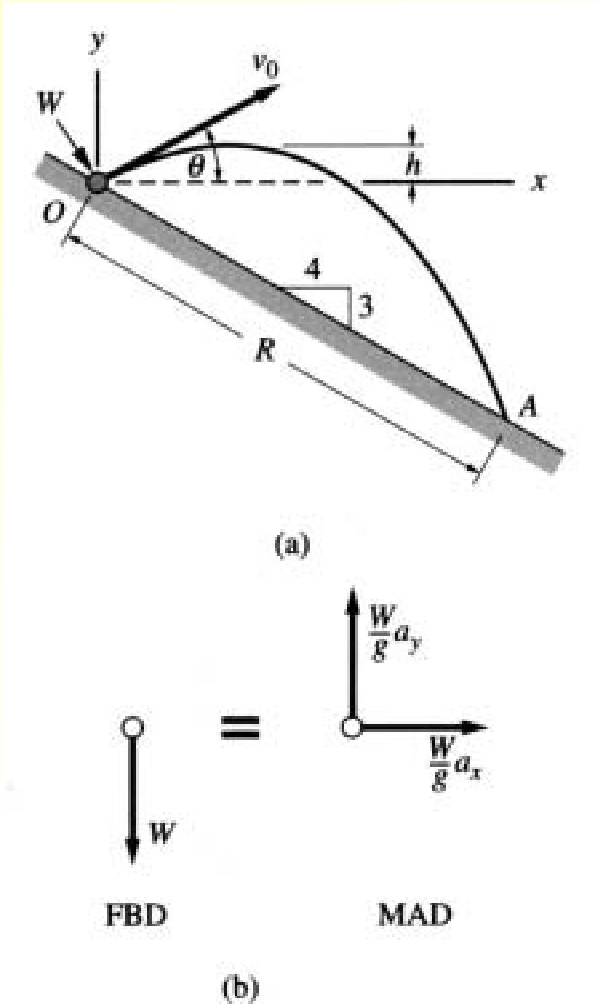


(a)

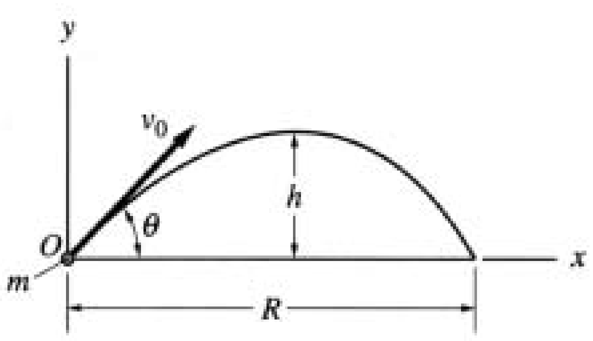


(b)

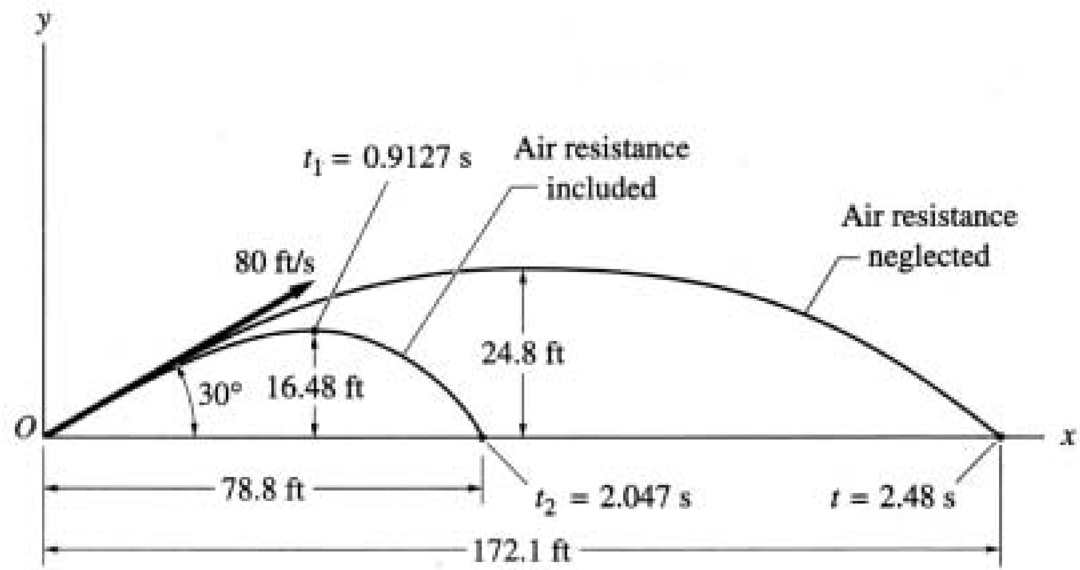
예제 12. 10



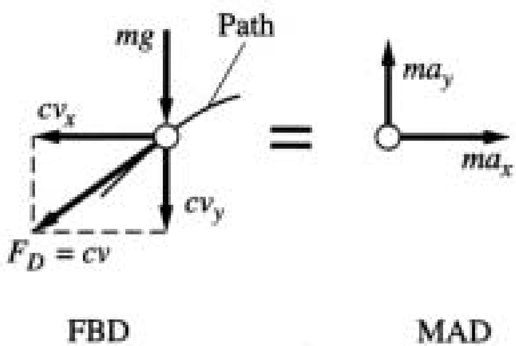
예제 12. 11


y
v_0
h
θ
O
m
x
R

(a)


y
t_1 = 0.9127 s
Air resistance
included
Air resistance
neglected
80 ft/s
24.8 ft
30°
16.48 ft
O
x
78.8 ft
t_2 = 2.047 s
t = 2.48 s
172.1 ft

(c)


mg
Path
cv_x
ma_y
=
ma_x
cv_y
$F_D = cv$
FBD
MAD

(b)

12. 6 질점 동역학 : 면적법에 의한 운동선도

✓ **운동선도 :** x축을 따라 직선운동을 하는 질점의 가속도, 속도 및 위치를 시간에 대해 표시

✓ **면적법** : 주어진 가속도선도로부터 속도와 위치선도를 작성하는 방법. 운동선도 중에 1개를 실험적으로 알고 있는 경우, 직선운동을 수치적으로 해석하는데 유용한 방법

직선운동은 $a = dv/dt$, $v = dx/dt$이므로, 시간 t에서

1) 속도선도의 기울기는 그 시간의 가속도 a와 같다.

2) 위치선도의 기울기는 그 시간의 속도와 같다.

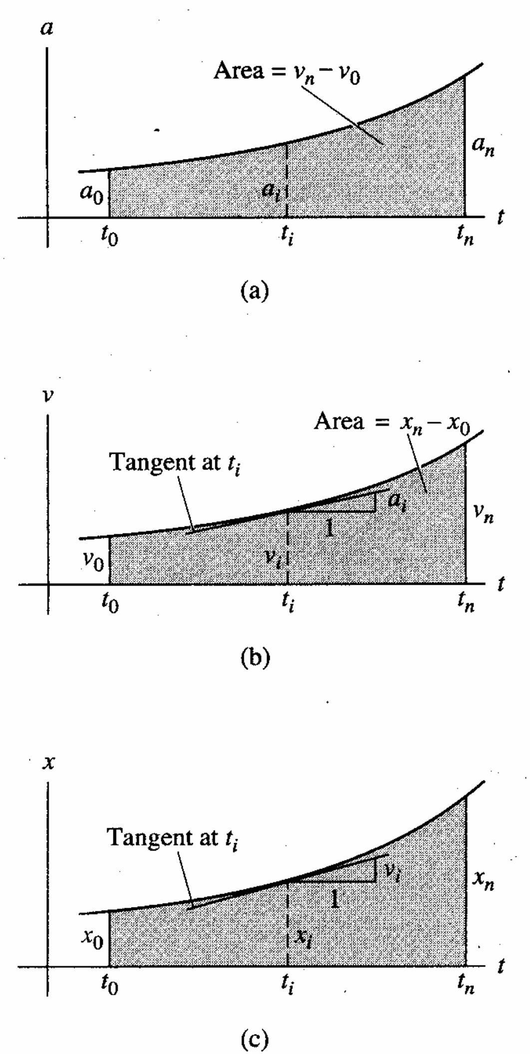
$dv/dt = a$, $dx/dt = v$

$$v_n - v_0 = \int_{t_0}^{t_n} a(t)\,dt$$

$$v_n - v_0 = \text{area of the } a-t \text{ diagram} \Big]_{t_0}^{t_n}$$

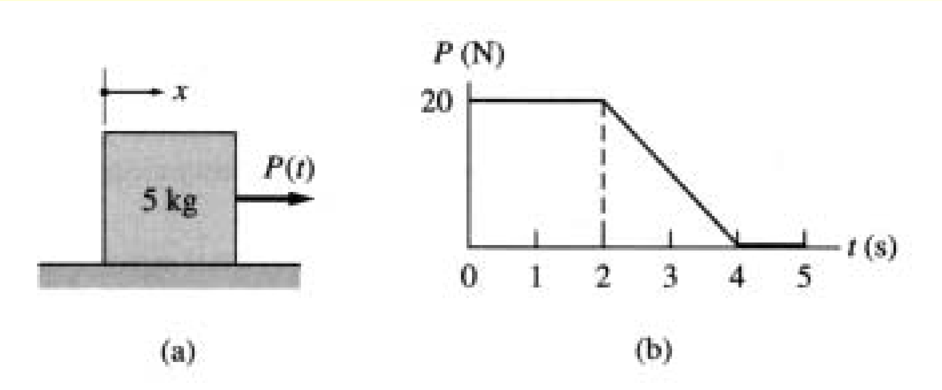
$$x_n - x_0 = \int_{t_0}^{t_n} v(t)\,dt$$

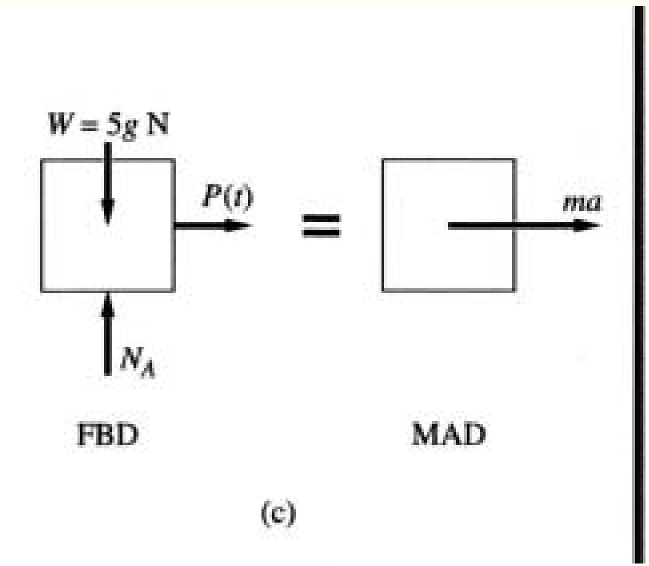
$$x_n - x_0 = \text{area of the } v-t \text{ diagram} \Big]_{t_0}^{t_n}$$

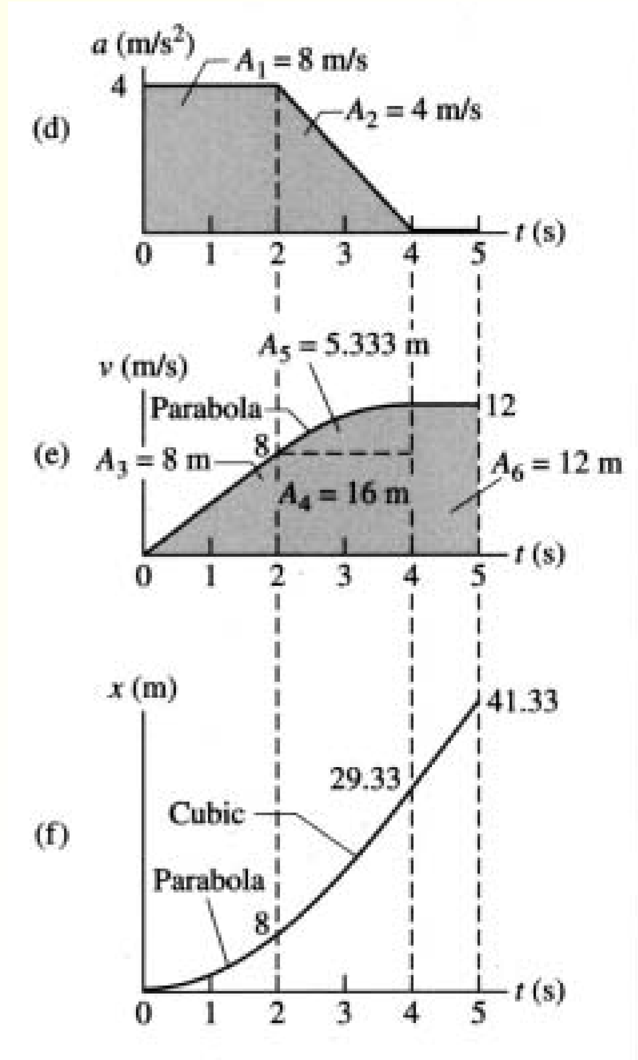


운동선도

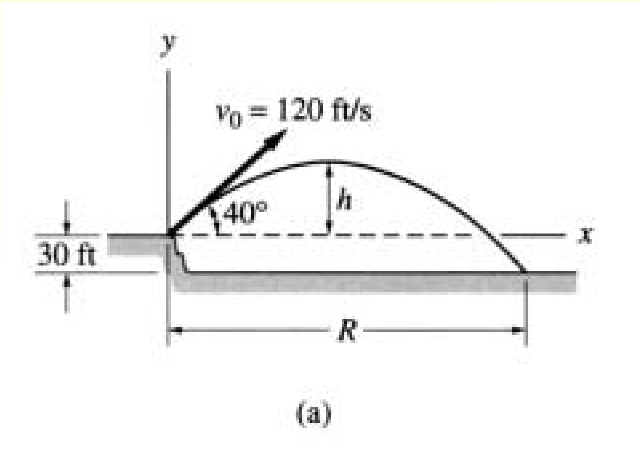
예제 12. 12

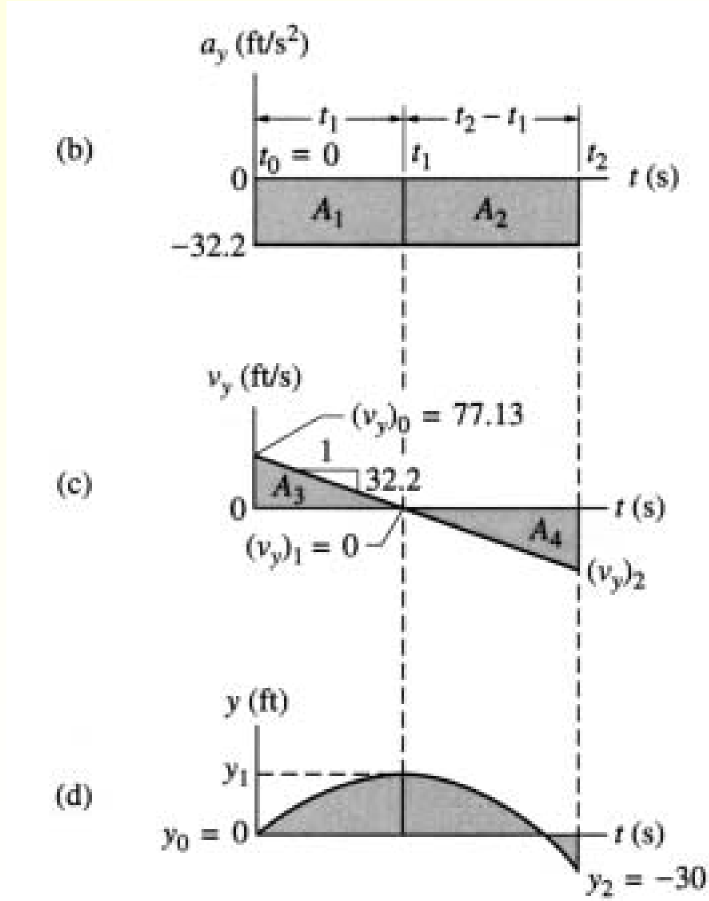

x
5 kg
P(t)
(a)
P (N)
20
0 1 2 3 4 5
t (s)
(b)


W = 5g N
P(t)
N_A
ma
FBD
MAD
(c)

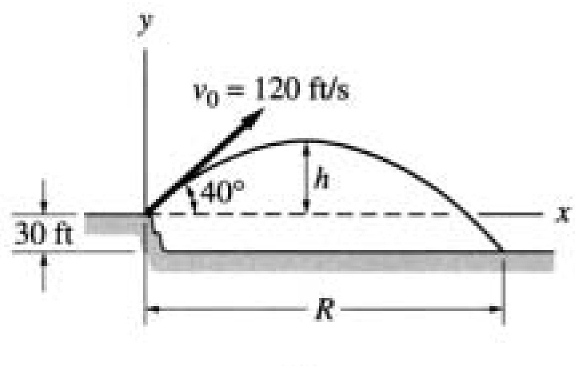

(d)
a (m/s²)
A_1 = 8 m/s
A_2 = 4 m/s
4
0 1 2 3 4 5
t (s)
(e)
v (m/s)
A_5 = 5.333 m
Parabola
12
8
A_3 = 8 m
A_4 = 16 m
A_6 = 12 m
t (s)
(f)
x (m)
41.33
29.33
Cubic
Parabola
8
t (s)

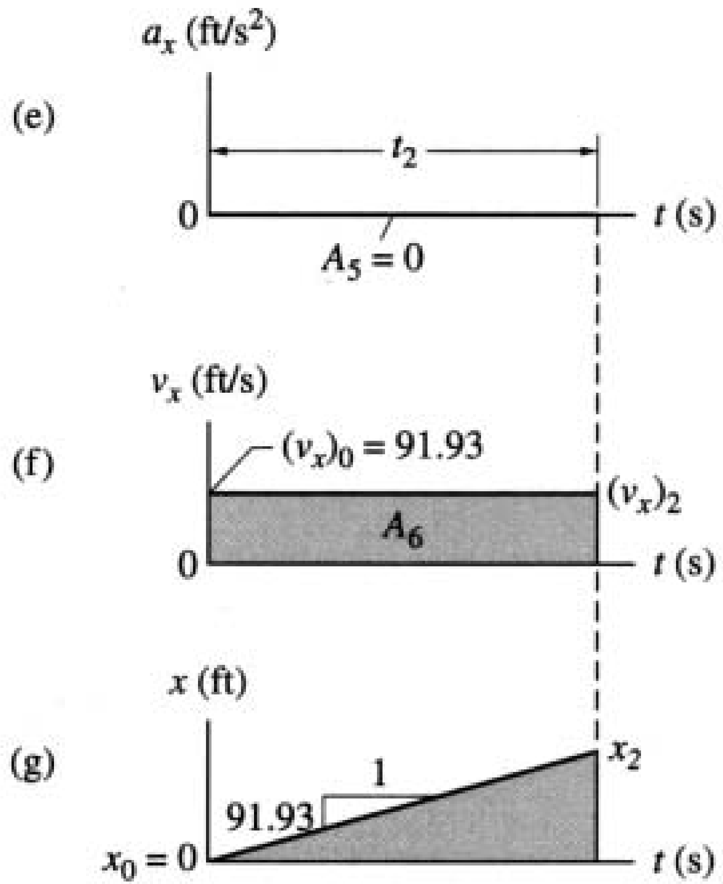
예제 12. 13


y
v0 = 120 ft/s
40°
h
x
30 ft
R
(a)

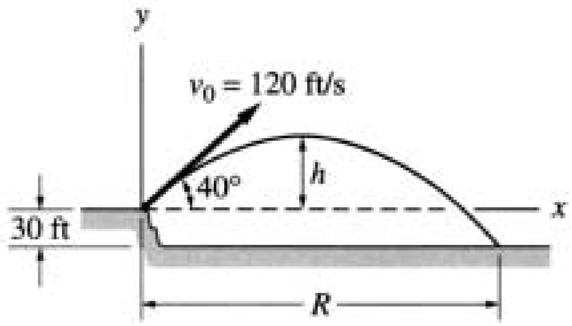

ay (ft/s2)
(b)
t1
t2 − t1
t0 = 0
t1
t2
0
t (s)
A1
A2
−32.2
vy (ft/s)
(vy)0 = 77.13
1
32.2
(c)
A3
0
t (s)
A4
(vy)1 = 0
(vy)2
y (ft)
y1
(d)
y0 = 0
t (s)
y2 = −30

예제 12. 13

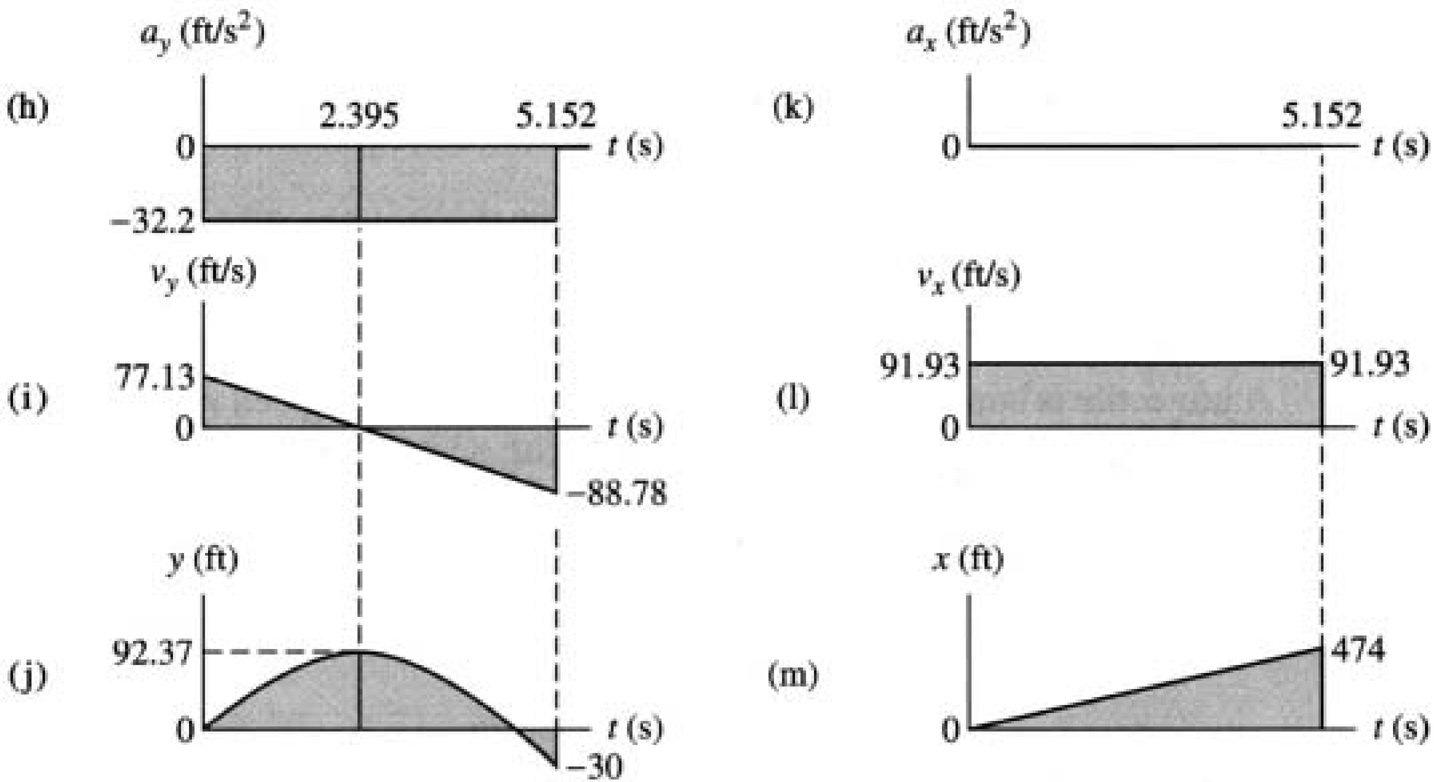

y
v_0 = 120 ft/s
40°
h
x
30 ft
R
(a)


(e)
a_x (ft/s²)
t_2
0
t (s)
$A_5 = 0$
(f)
v_x (ft/s)
$(v_x)_0 = 91.93$
$(v_x)_2$
A_6
0
t (s)
(g)
x (ft)
x_2
1
91.93
$x_0 = 0$
t (s)

예제 12. 13


y
v_0 = 120 ft/s
40°
h
x
30 ft
R

(a)


a_y (ft/s²)
(h)
2.395
5.152
0
t (s)
−32.2
v_y (ft/s)
(i)
77.13
0
t (s)
−88.78
y (ft)
(j)
92.37
0
t (s)
−30
a_x (ft/s²)
(k)
5.152
0
t (s)
v_x (ft/s)
(l)
91.93
91.93
0
t (s)
x (ft)
(m)
474
0
t (s)

제 13장 질점의 동역학: 곡선좌표계

강의 개요:

질점의 운동학과 운동역학을 곡선좌표를 이용하여 표현하는 방법을 설명한다.

곡선좌표계로는 경로좌표(path coordinates), 극좌표(polar coordinates) 및 원통좌표(cylindrical coordinates)를 이용한다.

13. 1 서 론

1. **직각좌표계 :** 직선운동, 직선운동의 중첩운동을 표현하는데 편리
2. **곡선좌표계 :** 평면 또는 공간에서의 곡선운동의 표현

1) 경로좌표(path coordinate), 법선 및 접선좌표 :

운동을 법선 및 접선방향 성분을 이용.

곡선운동의 이동경로가 주어진 경우에 편리

예) 자동차의 곡선 주행도로 이동

2) 극좌표(polar coordinate), 반경 및 횡좌표 :

운동 또는 운동력이 고정점으로부터 반경방향 거리 및 각도(방향)로 주어지는 경우에 편리.

예) 인공위성의 궤도운동

3) 원통좌표(cylindrical coordinate) :

극좌표에 축방향 좌표(z)가 추가된 좌표

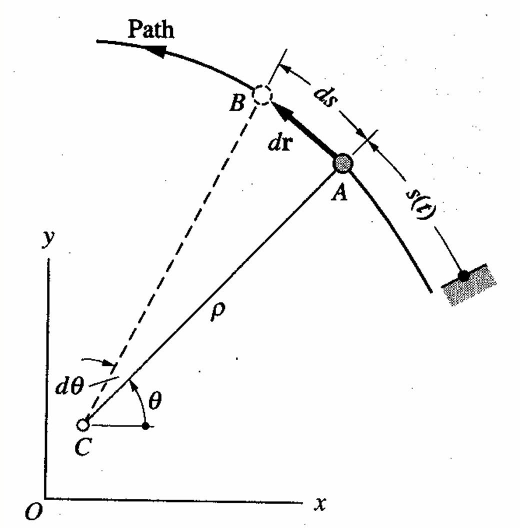
13.2 질점 동역학 : 경로좌표 (법선 및 접선좌표)

❑ 운동학: 좌표 및 기초벡터 정의

$$\dot{s} = \rho\dot{\theta}$$

곡률반경 식 :

$$\rho = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|} = \frac{\left[1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]^{3/2}}{\left|\frac{d^2x}{dy^2}\right|}$$



기초벡터(base vector), 단위벡터(unit vector) :

1) 단위법선(unit normal) $\mathbf{e}_n$, 단위접선(unit tangent) $\mathbf{e}_t$

2) 단위크기(1), 서로 수직(90도)

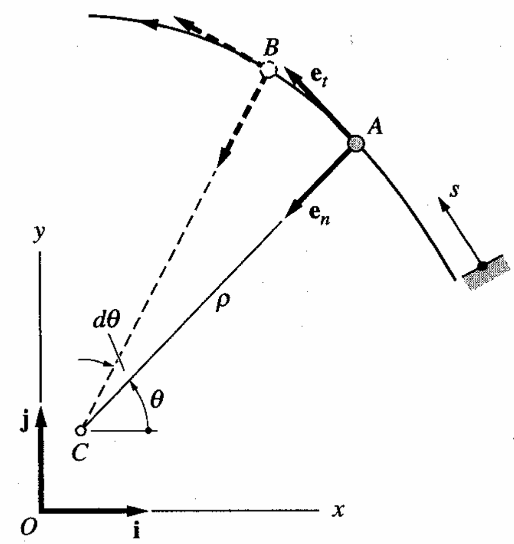
3) 속도, 가속도벡터의 기준으로 사용

4) 방향이 고정되지 않고, 질점 *A*의 위치에 따라 변화

5) $\mathbf{e}_t$: *A*에서 경로에 접선, *s*가 증가하는 방향

$\mathbf{e}_n$: 경로에 수직, 곡률중심 C로 향하는 방향

$d\mathbf{r} = \mathbf{e}_t ds$, $\mathbf{e}_t = d\mathbf{r}/ds$



❑ 운동학 : 기초벡터의 도함수

1) 기초벡터의 방향이 시간에 따라 변화(도함수)

2) 기초벡터 사이의 관계

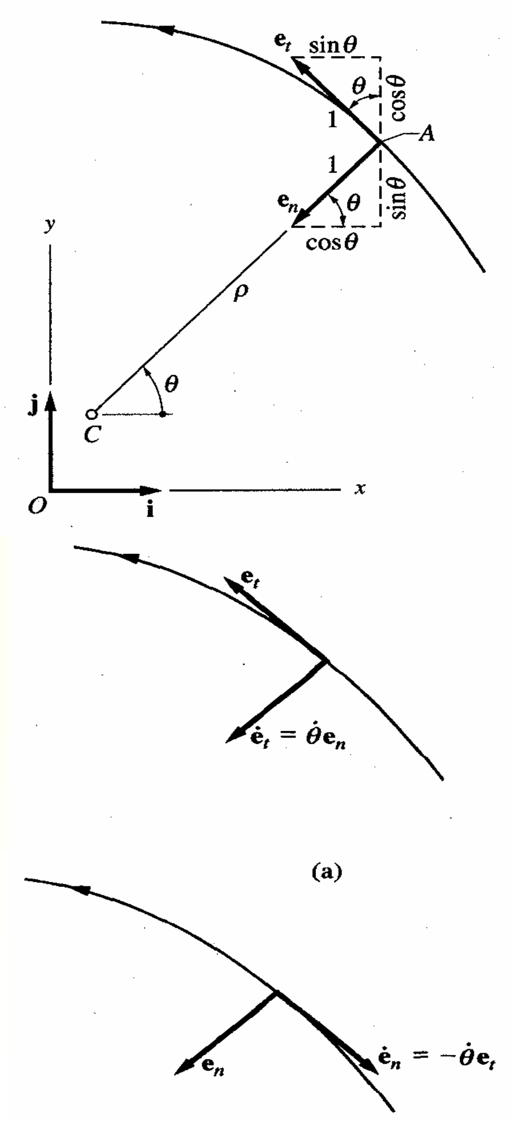
$e_t = -\sin\theta\ \mathbf{i} + \cos\theta\ \mathbf{j} \qquad e_n = -\cos\theta\ \mathbf{i} - \sin\theta\ \mathbf{j}$

$d\mathbf{i}/dt = d\mathbf{j}/dt = 0$ 이므로, 미분하면

$$\dot{\mathbf{e}}_t = (-\cos\theta\mathbf{i} - \sin\theta\mathbf{j})\dot{\theta} \qquad \dot{\mathbf{e}}_n = (\sin\theta\mathbf{i} - \cos\theta\mathbf{j})\dot{\theta}$$

$$\dot{\mathbf{e}}_t = \dot{\theta}\mathbf{e}_n \qquad \dot{\mathbf{e}}_n = -\dot{\theta}\mathbf{e}_t$$

3) 기초벡터와 도함수는 서로 수직, 방향이 변화



❑ 운동학 : 속도와 가속도

1. 속도(velocity)

$$\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt = (d\mathbf{r}/ds)(ds/dt) = \mathbf{e}_t(ds/dt) = v\mathbf{e}_t$$

1) 속도는 항상 $\mathbf{e}_t$ 방향으로, 경로의 접선방향

2) 속력 (speed) v : 속도 $\mathbf{v}$의 크기

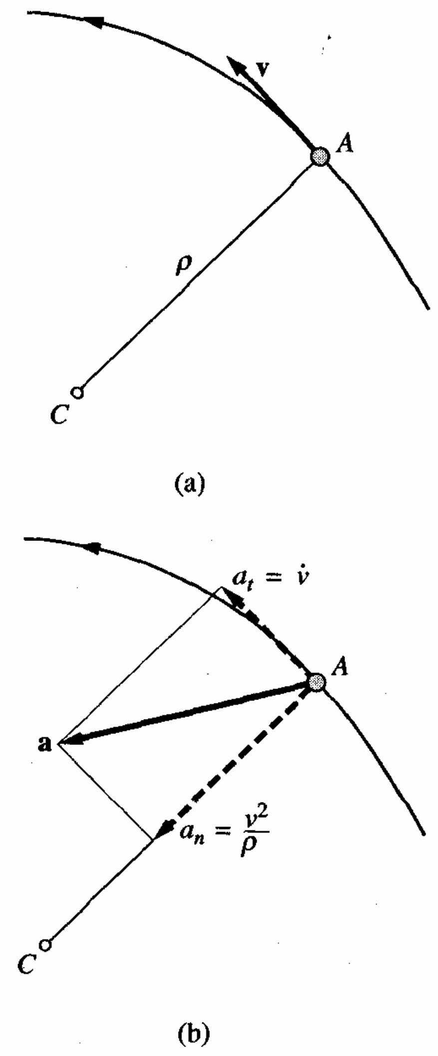
2. 가속도(acceleration)

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\mathbf{e}_t) = \dot{v}\mathbf{e}_t + v\dot{\mathbf{e}}_t = \dot{v}\mathbf{e}_t + v\dot{\theta}\mathbf{e}_n$$

$$\mathbf{a} = a_t\,\mathbf{e}_t + a_n\,\mathbf{e}_n \qquad a_n = \frac{v^2}{\rho} \qquad a_t = \dot{v}$$

다른 표현식, $a_t = dv/dt = (dv/ds)\,(ds/dt)$

$$a_t = v\frac{dv}{ds}$$



(a)
(b)

❑ 운동학 : 가속도의 특징

$$\mathbf{a} = a_t\,\mathbf{e}_t + a_n\,\mathbf{e}_n$$

1. 접선가속도 a_t :

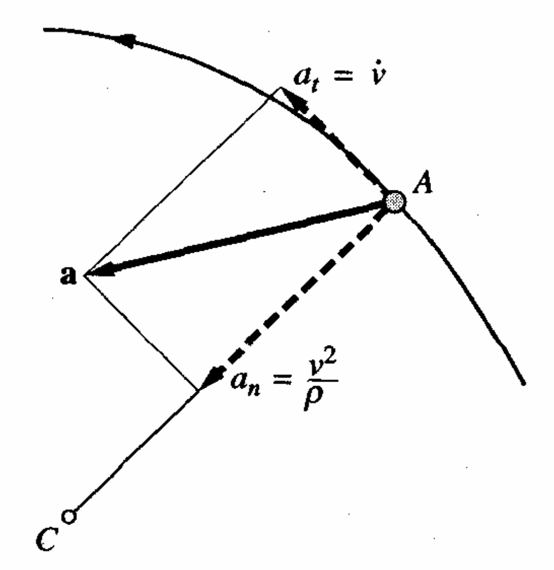
1) 가속도의 접선성분의 크기

2) 질점 속도의 크기(속력)의 시간변화율

속력 증가 : 속도와 같은 방향

속력 감소 : 속도와 역방향

속력 일정 : 0



2. 법선가속도 a_n : 구심가속도(centripetal acceleration)

1) 가속도의 법선성분의 크기

2) 질점 속도의 방향의 시간변화율

직선경로 : $a_n = 0$ (곡률반경 ∞, 방향 일정)

3) 항상 경로의 곡률중심을 향하는 방향

❑ 운동학 : 원운동과 공간운동

1. 원운동 :

1) 경로의 반경(곡률반경 R) 이 일정

$$v = R\dot{\theta}$$

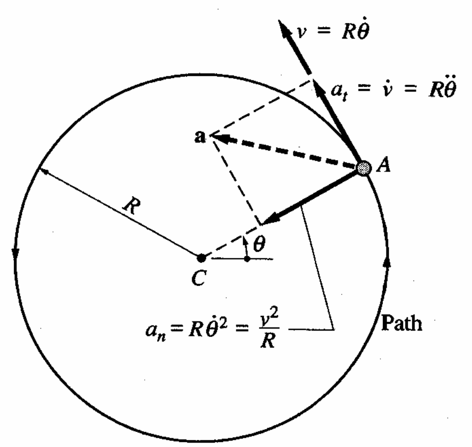
$$a_n = \frac{v^2}{R} = R\dot{\theta}^2 \qquad a_t = \dot{v} = R\ddot{\theta}$$

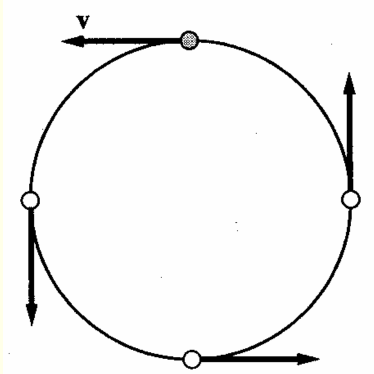
2) 직선 AC 의 각속도, 각가속도

(1) 각속도 증가: 각속도와 같은 방향

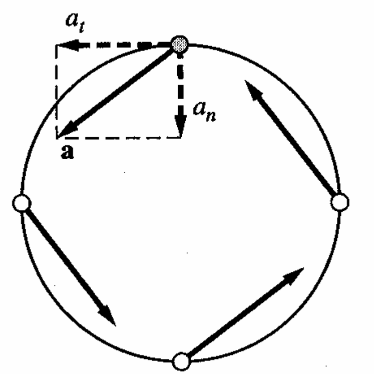
(2) 각속도 감소: 각속도와 역방향

(3) 각속도 일정 : 각가속도 0

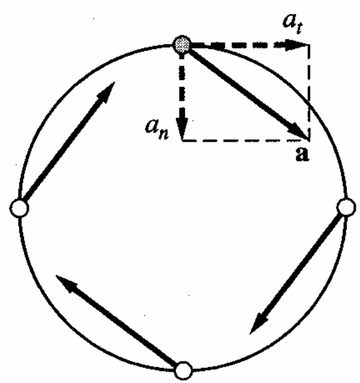




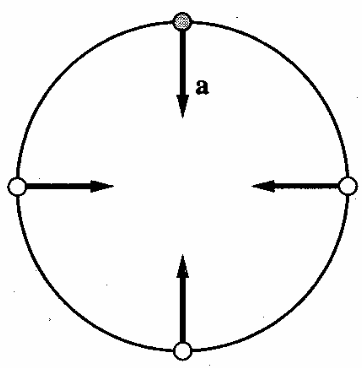
(a) Velocity



(b) Acceleration for increasing speed

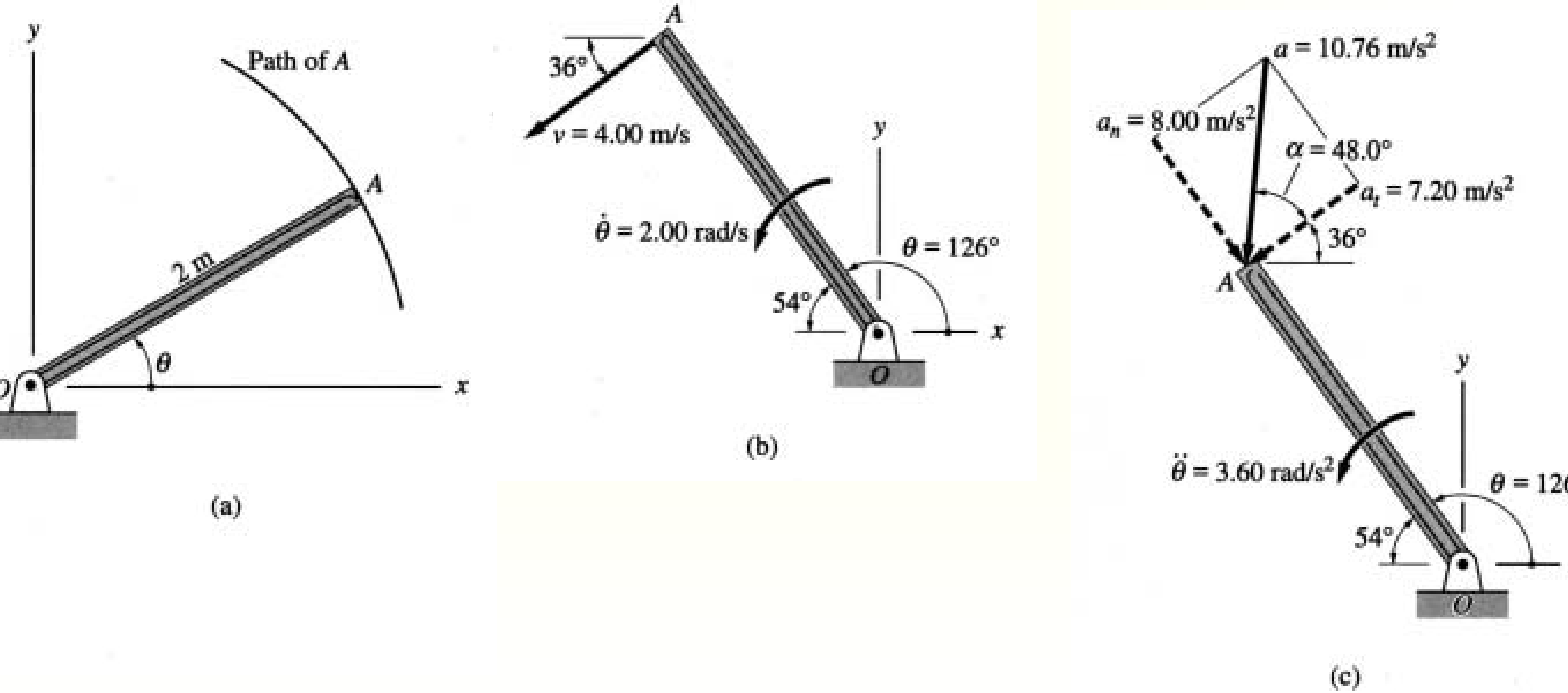


(c) Acceleration for decreasing speed

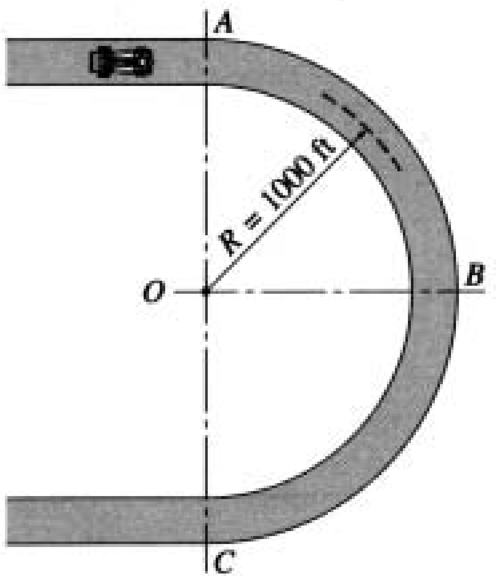


(d) Acceleration for constant speed

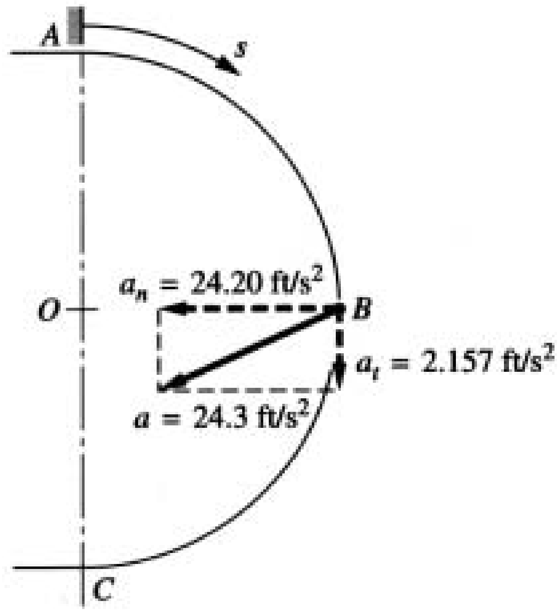
예제 13. 1


y
Path of A
A
2 m
θ
O
x
(a)
A
36°
v = 4.00 m/s
y
θ̇ = 2.00 rad/s
θ = 126°
54°
x
O
(b)
a = 10.76 m/s²
a_n = 8.00 m/s²
α = 48.0°
a_t = 7.20 m/s²
36°
A
y
θ̈ = 3.60 rad/s²
θ = 12
54°
O
(c)

예제 13. 2

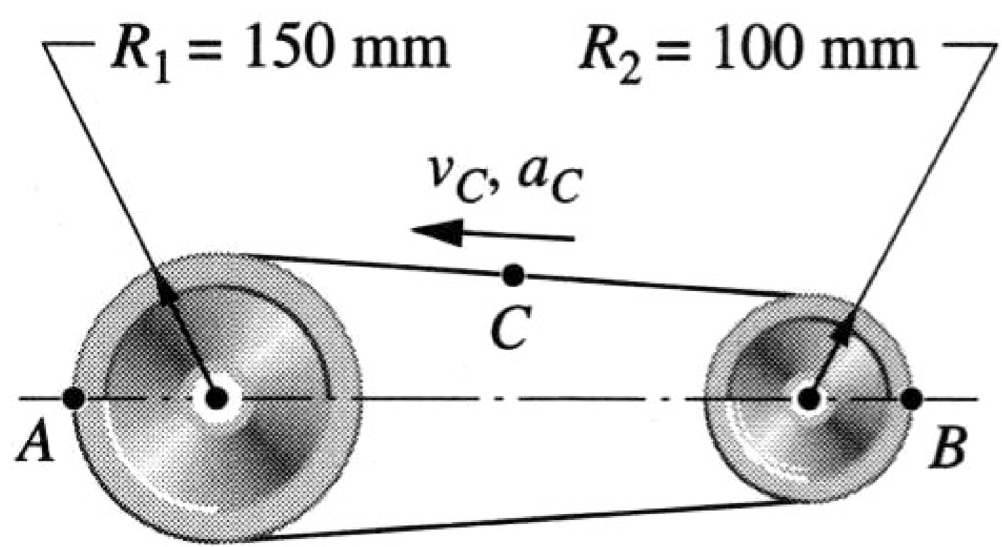


(a)

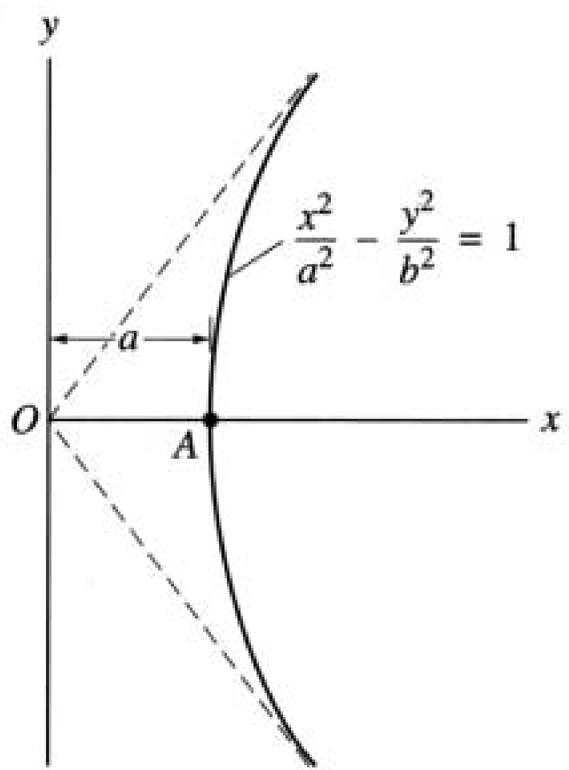


(b)

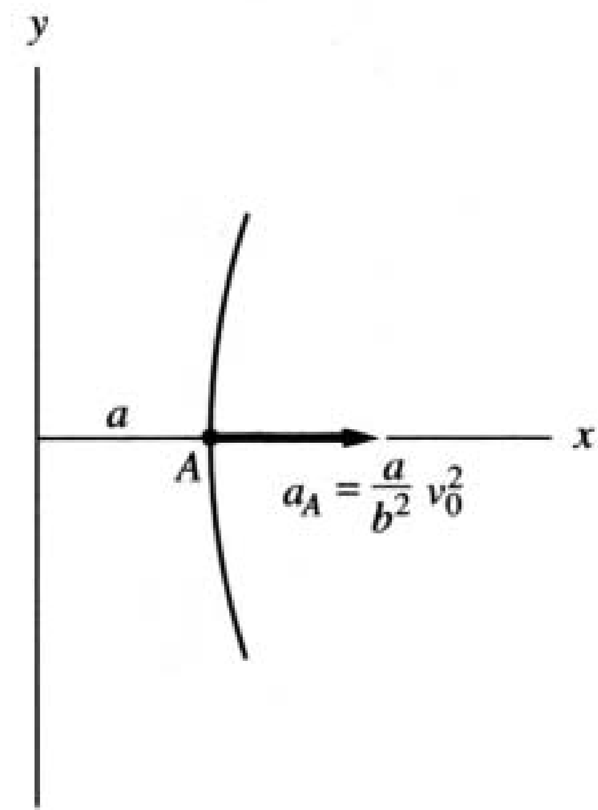
예제 13. 3



예제 13. 4



(a)



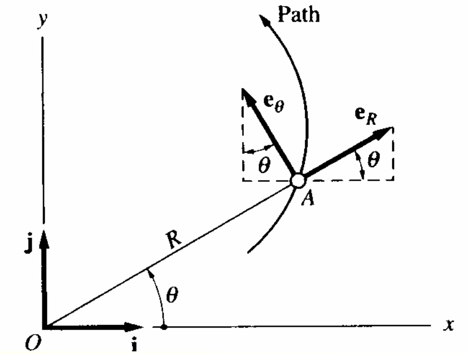
(b)

13.3 극좌표와 원통좌표 : 극좌표(1)

❑ 좌표계(R, θ) 설명

1) 반경좌표 R : 반경 선분 OA의 길이, 질점 위치벡터 **r**의 크기

2) 각도 θ : x축과 반경선분 사이의 각도(radian)



❑ 기초벡터($\mathbf{e}_R$, $\mathbf{e}_\theta$)의 정의 및 특징

1) $\mathbf{e}_R$: 반경선분을 따르는 방향, O로부터 멀어지는 향이 +

2) $\mathbf{e}_\theta$: θ가 증가하는 방향, $\mathbf{e}_R$과 수직방향

3) 기초벡터는 질점의 이동에 따라 회전

4) 경로좌표계와 유사한 회전좌표계의 기초벡터

5) 크기는 1로 일정, 방향이 시간에 따라 변화 (도함수)

6) 경로좌표 : 질점의 경로와 운동방향에 의존

7) 극좌표 : 질점의 위치에 의해 결정

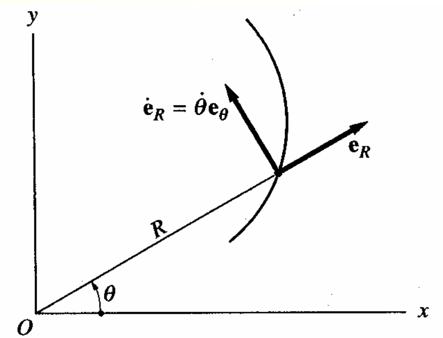
8) 직교좌표의 기초벡터와의 관계:

$$\mathbf{e}_R = \cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j}$$

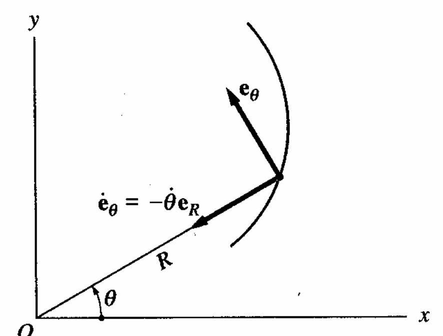
$$\mathbf{e}_\theta = -\sin\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{j}$$

$$\frac{d\mathbf{e}_R}{dt} = (-\sin\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{j})\dot{\theta} \qquad \frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} = (-\cos\theta\mathbf{i} - \sin\theta\mathbf{j})\dot{\theta}$$

$$\dot{\mathbf{e}}_R = \dot{\theta}\mathbf{e}_\theta \qquad \dot{\mathbf{e}}_\theta = -\dot{\theta}\mathbf{e}_R$$



(a)



질점 동역학 : 극좌표(2)

❑ 속도 벡터

1) 질점의 위치벡터 : $\mathbf{r} = R\,\mathbf{e}_R$

2) 속도벡터 : $\mathbf{v} = d\,\mathbf{r}/dt$ 이므로

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(R\mathbf{e}_R) = \dot{R}\mathbf{e}_R + R\dot{\mathbf{e}}_R$$

$$\mathbf{v} = v_R\ \mathbf{e}_R + v_\theta\ \mathbf{e}_R \qquad v_R = \dot{R} \qquad v_\theta = R\dot{\theta}$$

여기서 v_R : 반경방향성분, v_θ : 횡방향성분

❑ 가속도 벡터

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{R}\mathbf{e}_R + R\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta)$$

$$= (\ddot{R}\mathbf{e}_R + \dot{R}\dot{\mathbf{e}}_R) + (\dot{R}\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + R\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta + R\dot{\theta}\dot{\mathbf{e}}_\theta)$$

$$\mathbf{a} = a_R\ \mathbf{e}_R + a_\theta\ \mathbf{e}_\theta$$

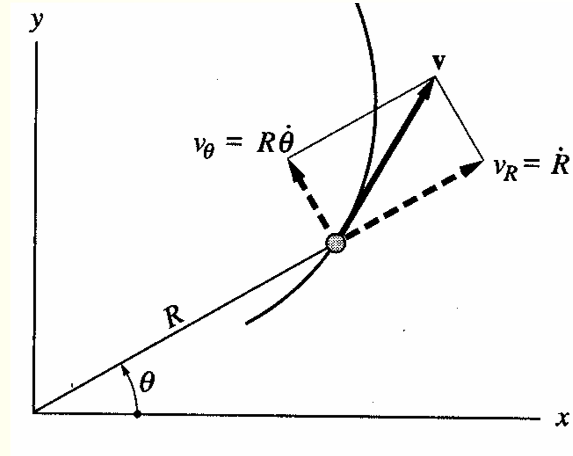
$$a_R = \ddot{R} - R\,\dot{\theta}^2 \qquad a_\theta = R\ddot{\theta} + 2\dot{R}\dot{\theta}$$

원운동(경로가 원)의 경우 : 극좌표 R은 원의 반경(일정)

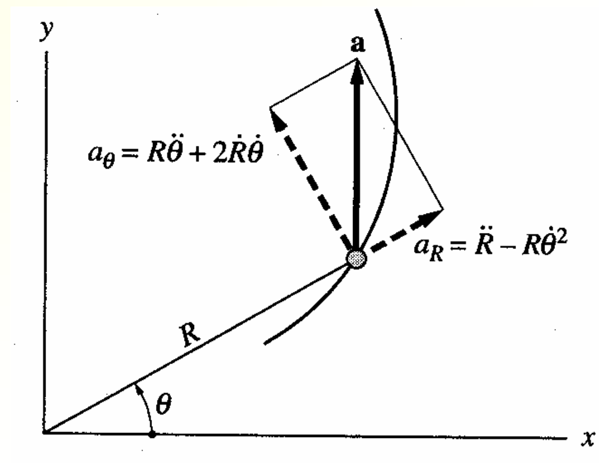
$$\mathbf{v} = R\dot{\theta}\ \mathbf{e}_\theta$$

$$\mathbf{a} = -R\,\dot{\theta}^2\ \mathbf{e}_R + R\,\ddot{\theta}\ \mathbf{e}_\theta$$

$$\mathbf{e}_R = -\,\mathbf{e}_n, \quad \mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_t$$



(a)



(b)

질점 동역학 : 원통좌표(1)

✓ 공간운동

1) 공간내의 질점 A의 위치를 표현하는데 이용 :

2) 원통좌표 : 극좌표(R, θ), 직각 좌표(축방향 좌표) z

3) 질점의 위치벡터 : $\mathbf{r} = R\,\mathbf{e}_R + z\,\mathbf{e}_z$

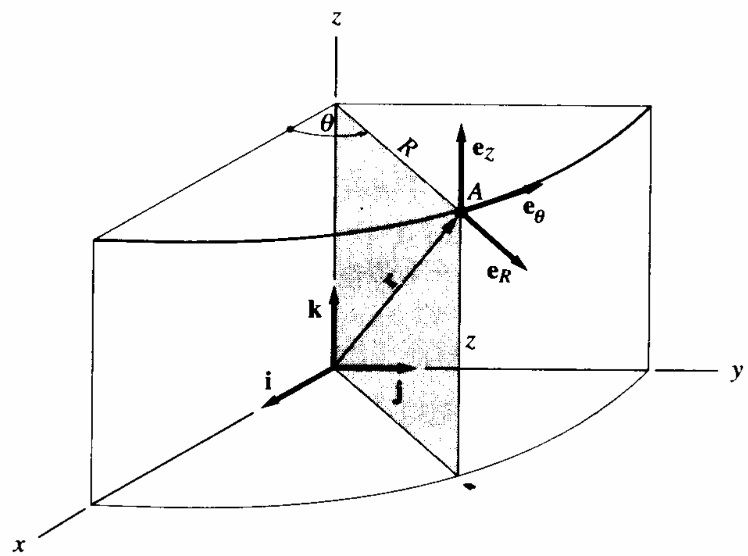
4) $z\,\mathbf{e}_z$ 항의 추가 이외는 극좌표와 동일

5) $d\,\mathbf{k}/dt = 0$

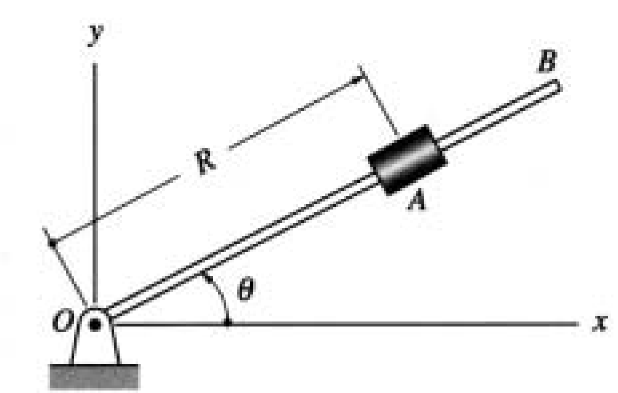
6) 속도 및 가속도벡터 :

$$\mathbf{v} = \dot{R}\,\mathbf{e}_R + R\dot{\theta}\,\mathbf{e}_\theta + \dot{z}\,\mathbf{e}_z$$

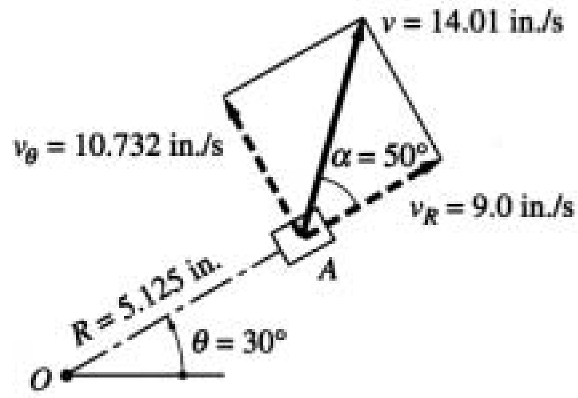
$$\mathbf{a} = (\ddot{R} - R\dot{\theta}^2)\,\mathbf{e}_R + (R\ddot{\theta} + 2\dot{R}\dot{\theta})\,\mathbf{e}_\theta + \ddot{z}\,\mathbf{e}_z$$



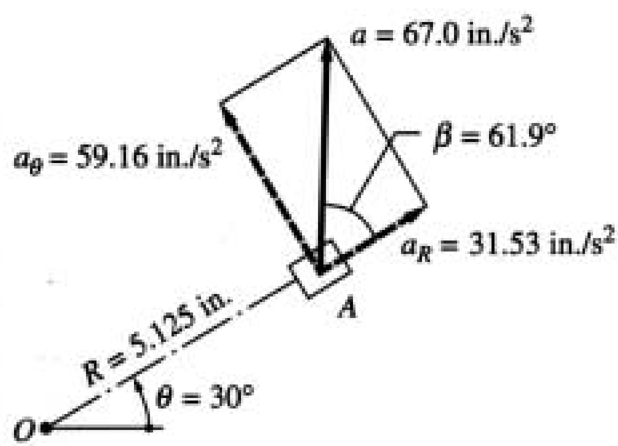
예제 13. 5


y
B
R
A
θ
O
x

(a)

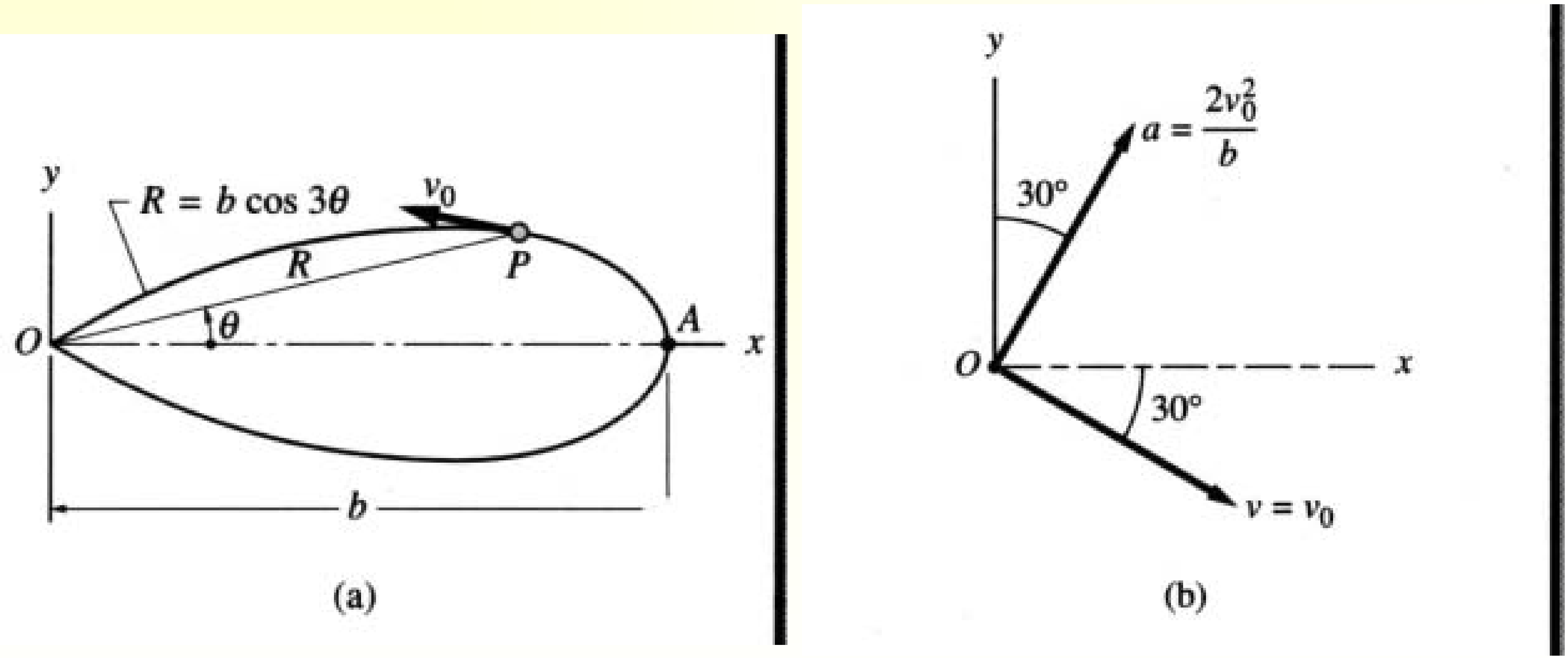

v = 14.01 in./s
v_θ = 10.732 in./s
α = 50°
v_R = 9.0 in./s
A
R = 5.125 in.
θ = 30°
O

(b)

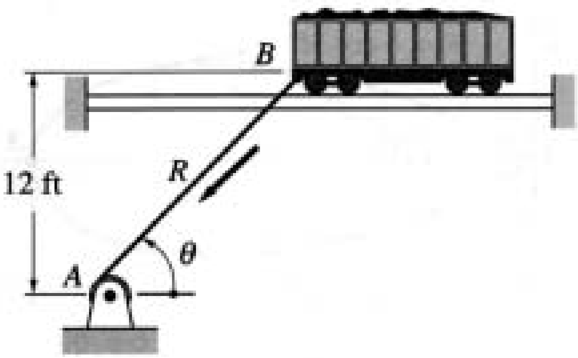

a = 67.0 in./s²
β = 61.9°
a_θ = 59.16 in./s²
a_R = 31.53 in./s²
A
R = 5.125 in.
θ = 30°
O

(c)

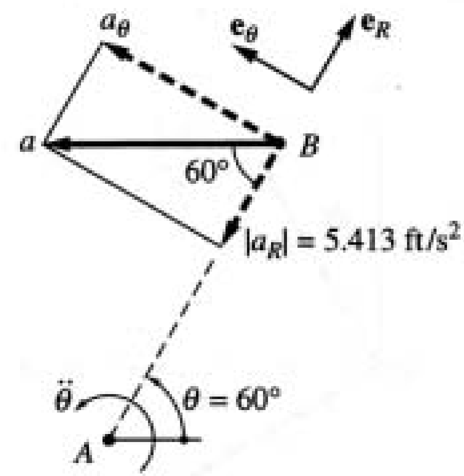
예제 13. 6



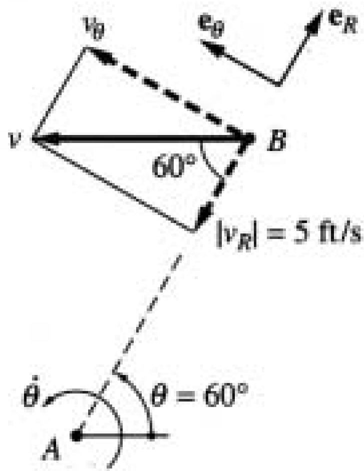
예제 13. 7


B
12 ft
R
θ
A

(a)

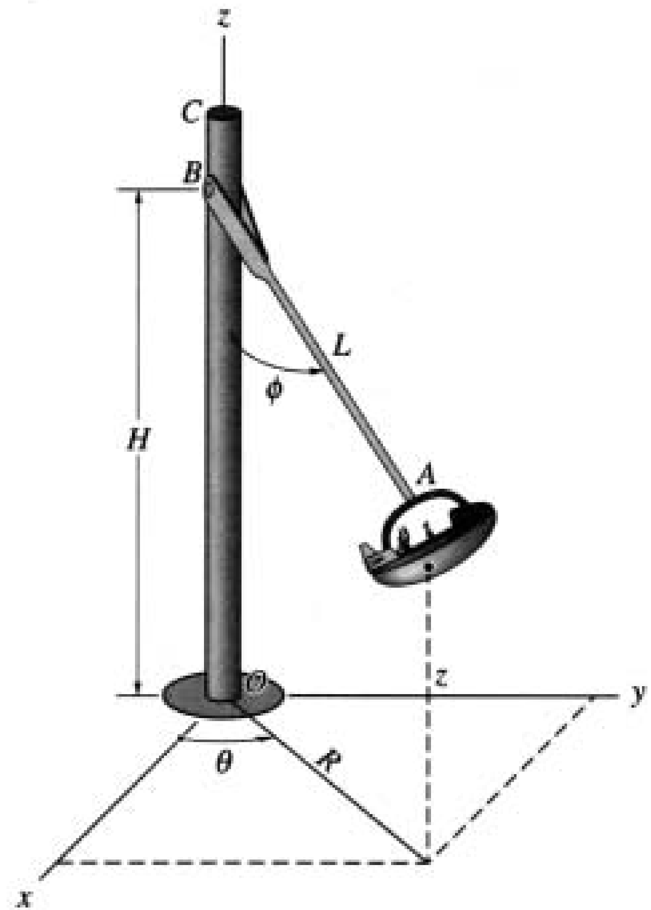

a_θ
$\mathbf{e}_\theta$
$\mathbf{e}_R$
a
B
60°
$|a_R| = 5.413\ \text{ft/s}^2$
$\ddot{\theta}$
$\theta = 60°$
A

(c)


v_θ
$\mathbf{e}_\theta$
$\mathbf{e}_R$
v
B
60°
$|v_R| = 5\ \text{ft/s}$
$\dot{\theta}$
$\theta = 60°$
A

(b)

예제 13. 8



13.4 질점 동역학 : 운동역학(1)

❑ 힘-질량-가속도법

✓ **해법의 기본 4 단계**

1) 질점의 자유물체도(FBD)를 그린다.

2) 가속도의 운동학적인 해석

3) 질점의 질량-가속도선도(MAD)를 그린다.

4) FBD와 MAD의 정역학적 등가관계로부터
 운동방정식을 유도

✓ **경로좌표(*n* - *t* 좌표) :**

FBD와 MAD의 정역학적 등가조건으로부터

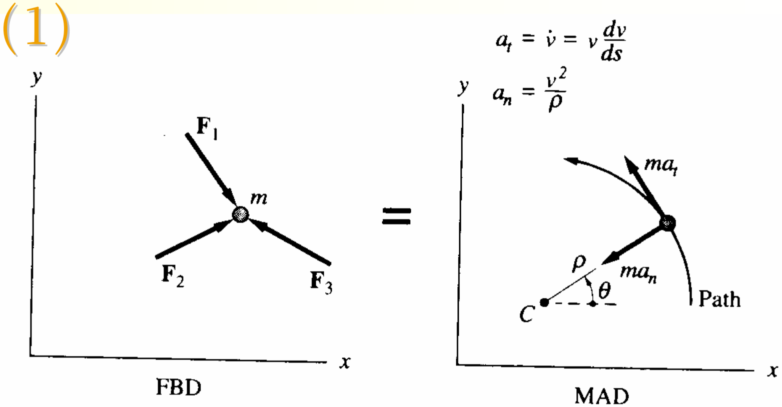
질점의 운동방정식은

$$\sum F_n = ma_n \qquad \sum F_t = ma_t$$

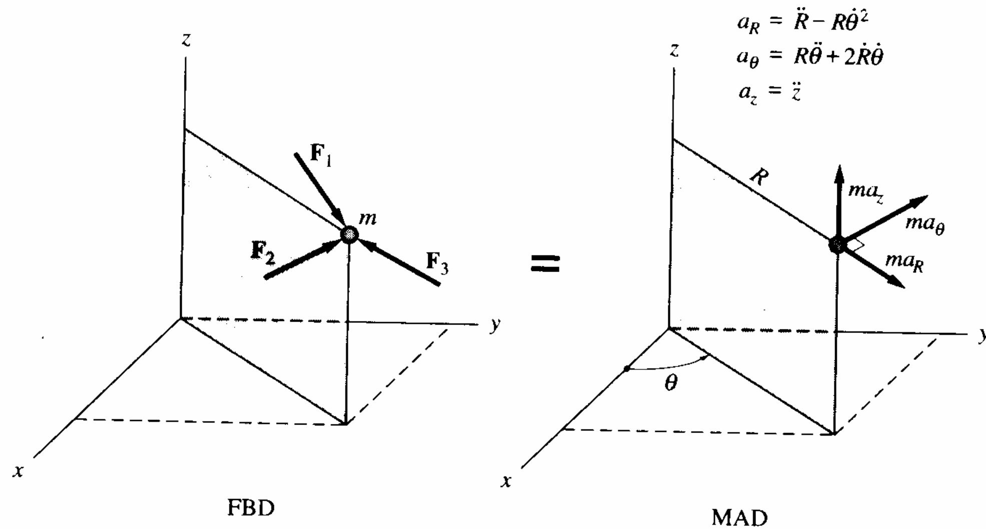
✓ **원통좌표 :**

질점의 운동방정식은

$$\sum F_R = ma_R \qquad \sum F_\theta = ma_\theta \qquad \sum F_z = ma_z$$

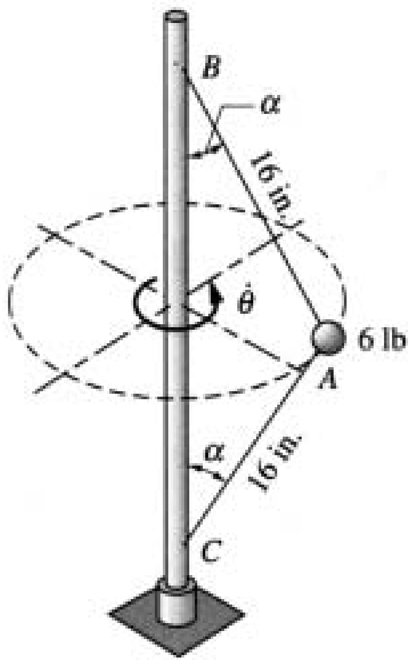


(a) Path (*n*-*t*) coordinates

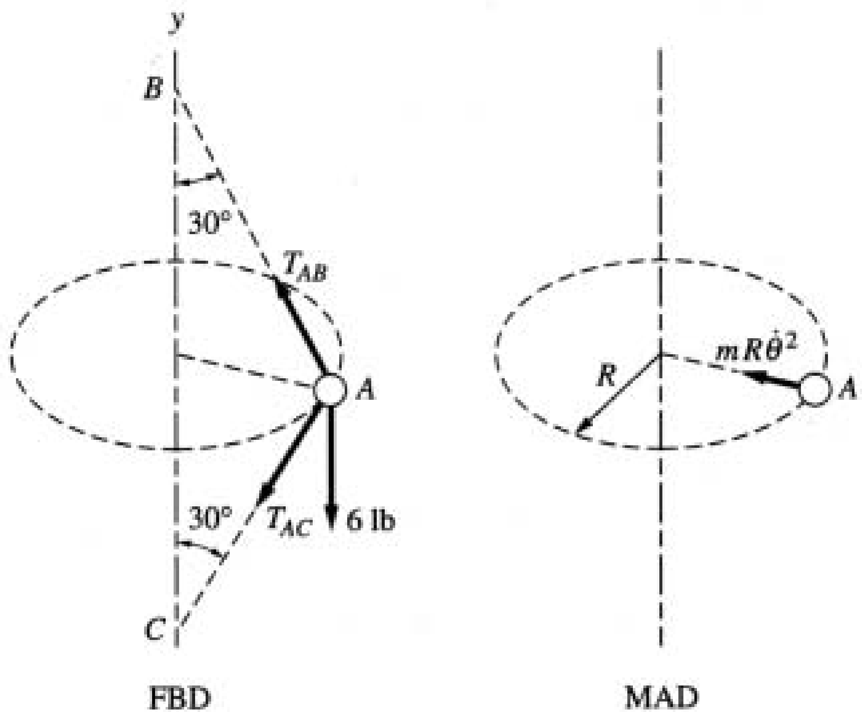


(b) Cylindrical coordinates

예제 13. 9

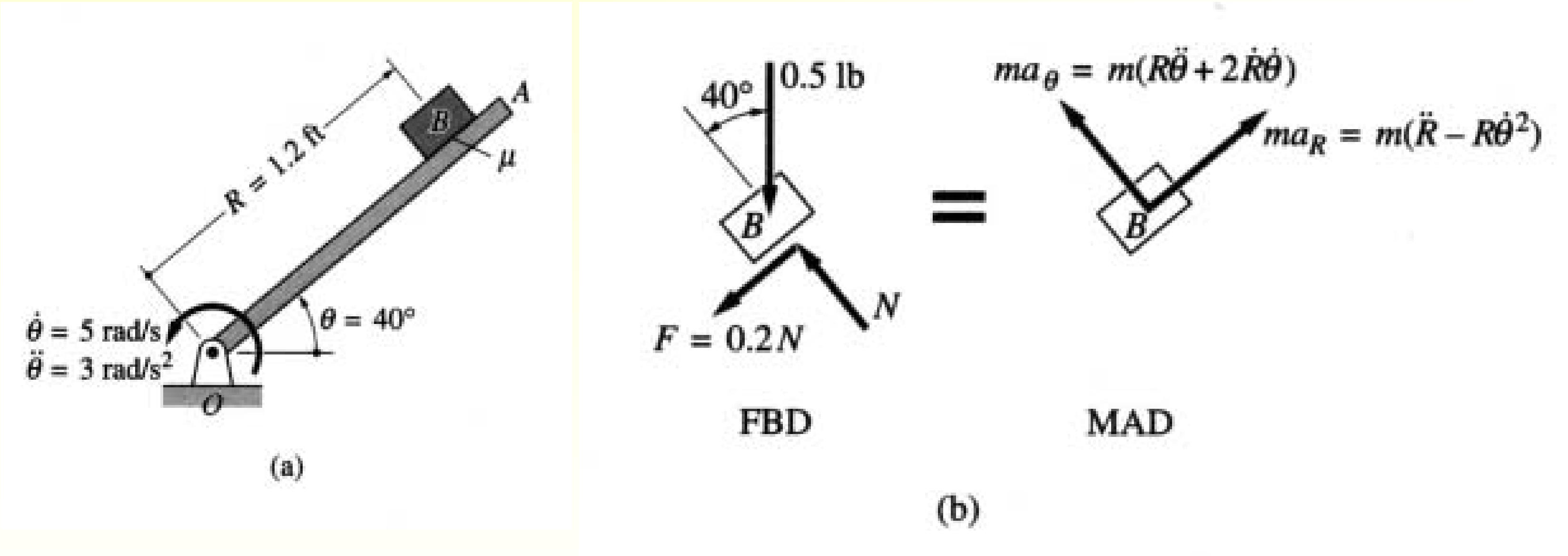

B
α
16 in.
θ̇
6 lb
A
α
16 in.
C

(a)

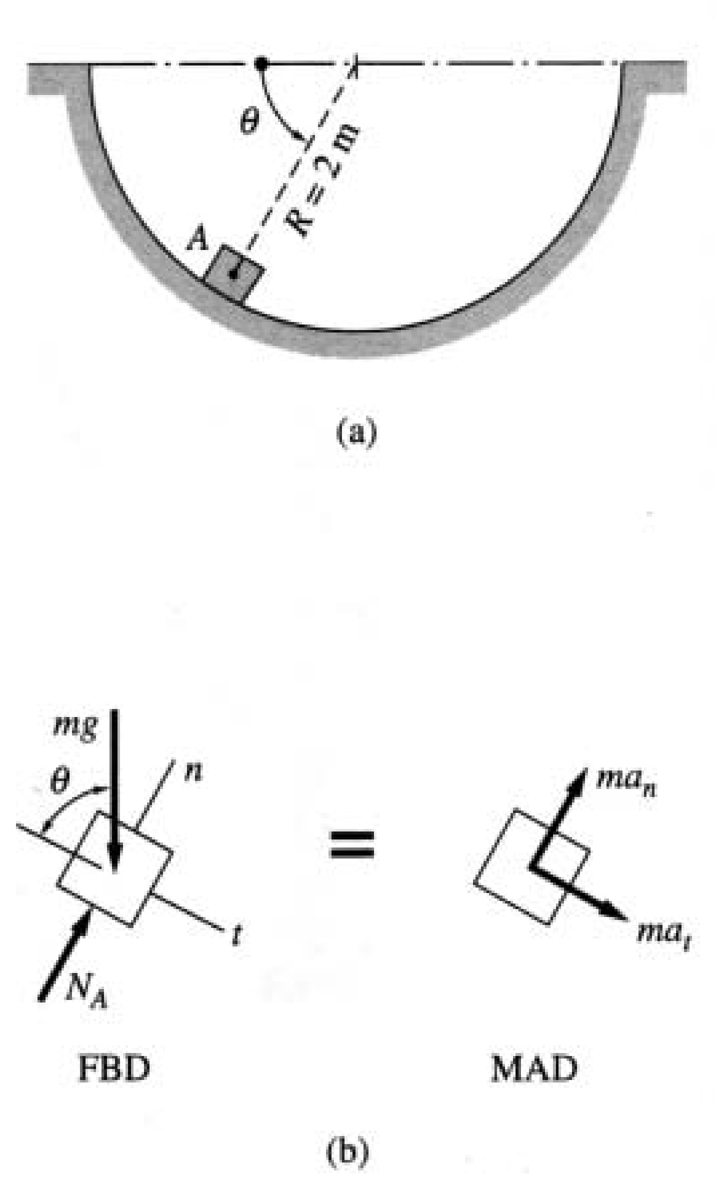

y
B
30°
T_{AB}
A
30°
T_{AC}
6 lb
C
FBD
$mR\dot{\theta}^2$
R
A
MAD

(b)

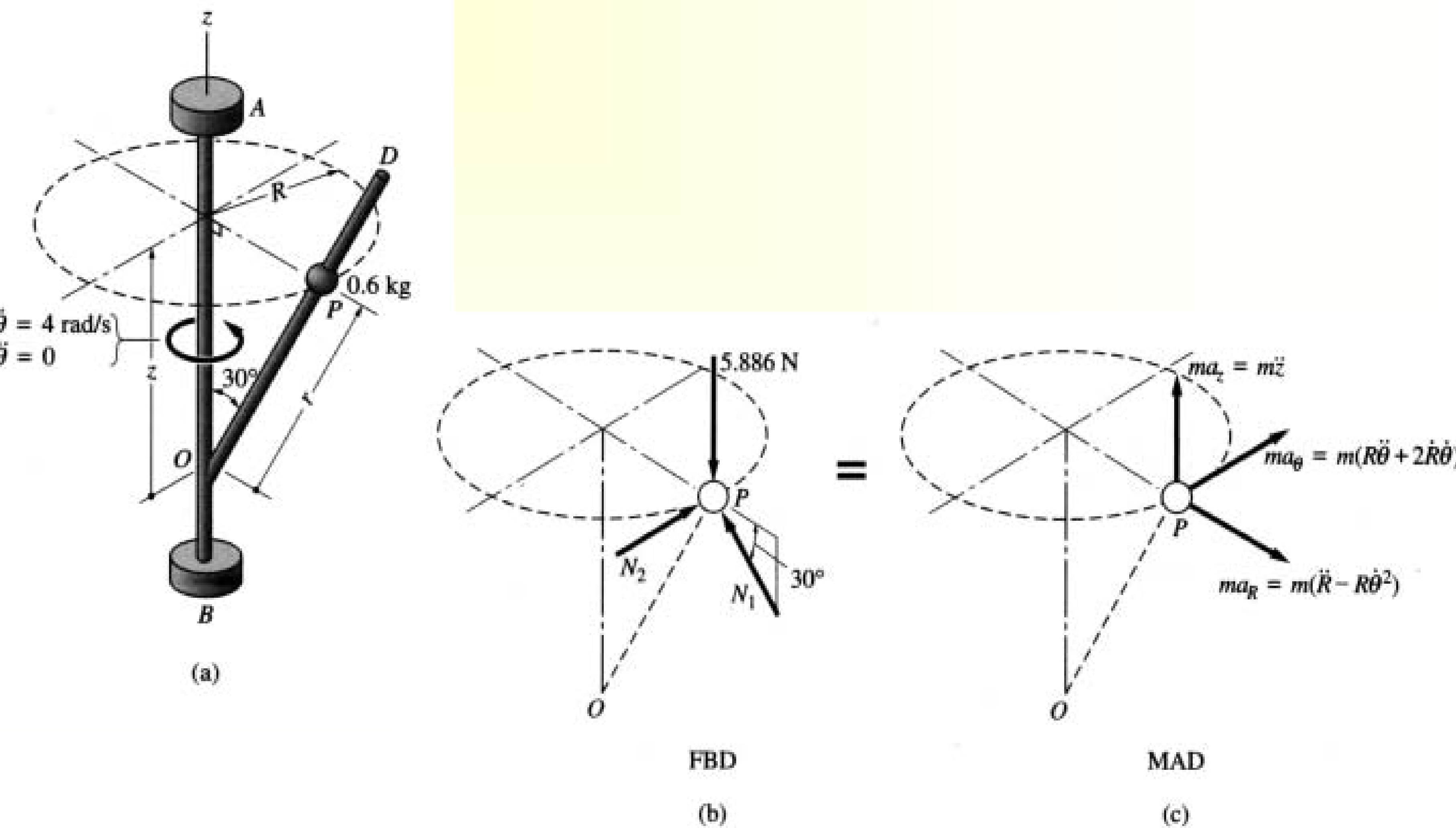
예제 13. 10


R = 1.2 ft
B
A
μ
$\dot{\theta}$ = 5 rad/s
$\ddot{\theta}$ = 3 rad/s²
θ = 40°
O
(a)
40°
0.5 lb
B
F = 0.2N
N
FBD
$ma_\theta = m(R\ddot{\theta} + 2\dot{R}\dot{\theta})$
$ma_R = m(\ddot{R} - R\dot{\theta}^2)$
B
MAD
(b)

예제 13. 11



예제 13. 12


z
A
B
D
R
O
P
0.6 kg
θ̇ = 4 rad/s
θ̈ = 0
30°
r
(a)
5.886 N
N2
N1
30°
FBD
(b)
=
ma_z = mz̈
ma_θ = m(Rθ̈ + 2Ṙθ̇)
ma_R = m(R̈ − Rθ̇²)
MAD
(c)