03장 로봇과 자코비안 행렬

지금까지 로봇의 기구학 계산을 통해서 각 관절의 회전 각도와 로봇의 말단의 사이의 관계를 살펴보았다. 2자유도 로봇의 경우 해석적인 계산을 통해서 순기구학 및 역기구학을 계산할 수 있지만 일반적으로 복잡한 형태를 갖는 로봇의 경우 기구학 계산은 매우 어렵게 된다. 그렇지만, 회전 각도와 로봇 말단 사이 관계의 미분을 이용하면 일반적인 로봇 경우에 대해서도 기구학 계산의 어려움을 개선할 수 있다.

3.1 로봇 기구학의 미분관계

다음의 그림 3.1에 나타낸 평면 2링크 로봇을 예로 들어서 로봇 각 관절의 각속도와 로봇 말단의 미분값에 대해서 고찰해 보도록 한다.

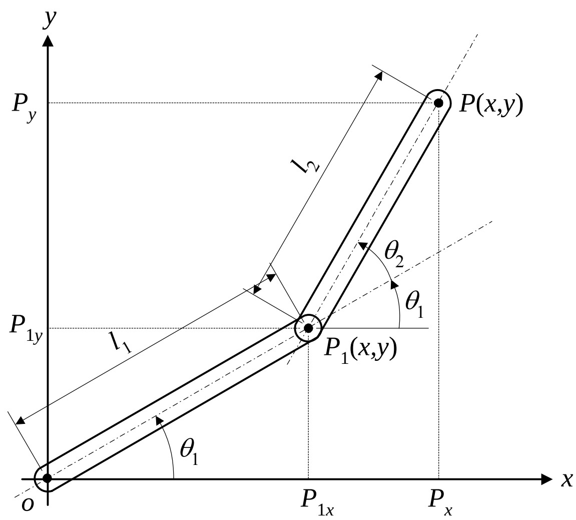

그림 3.1 평면 2링크 회전 관절형 로봇

회전 각도와 로봇 말단의 미분 관계를 계산하기 위해서 먼저, 평면 2링크 회전 관절형 로봇의 순기구학을 다음에 표기한다.

$$P_x = l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \tag{3.1}$$

$$P_y = l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \tag{3.2}$$

위 식의 양변을 시간에 대하여 미분하여 다음의 관계를 얻을 수 있다.

$$\dot{P}_x = -l_1\dot{\theta}_1 \sin(\theta_1) - l_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\sin(\theta_1 + \theta_2) \tag{3.3}$$

$$\dot{P}_y = l_1\dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) + l_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\cos(\theta_1 + \theta_2) \tag{3.4}$$

이 때, 미분 과정에서 다음과 같은 삼각함수의 미분 관계식을 사용하였다.

$$\frac{d\sin(\theta)}{dt}=\frac{d\sin(\theta)}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}=\frac{d\sin(\theta)}{d\theta}\dot{\theta},\ \frac{d\cos(\theta)}{dt}=\frac{d\cos(\theta)}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}=\frac{d\cos(\theta)}{d\theta}\dot{\theta}$$

$$\frac{d\sin(\theta_1+\theta_2)}{dt}=\frac{d\sin(\theta_1+\theta_2)}{d(\theta_1+\theta_2)}\cdot\frac{d(\theta_1+\theta_2)}{dt}=\cos(\theta_1+\theta_2)\cdot(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)$$

$$\frac{d\cos(\theta_1+\theta_2)}{dt}=\frac{d\cos(\theta_1+\theta_2)}{d(\theta_1+\theta_2)}\cdot\frac{d(\theta_1+\theta_2)}{dt}=-\sin(\theta_1+\theta_2)\cdot(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)$$

앞에서 구성한 식(3.3)과 (3.4)를 다음과 같이 행렬의 형태로 표기할 수 있다.

$$\begin{bmatrix}\dot{P}_x\\ \dot{P}_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-l_1\sin(\theta_1)-l_2\sin(\theta_1+\theta_2) & -l_2\sin(\theta_1+\theta_2)\\ l_1\cos(\theta_1)+l_2\cos(\theta_1+\theta_2) & l_2\cos(\theta_1+\theta_2)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\dot{\theta}_1\\ \dot{\theta}_2\end{bmatrix} \tag{3.5}$$

$$\dot{\mathbf{P}}=\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\theta}}$$

이 때, 편리성을 위해서 $\mathbf{J}$로 정리한 행렬은 다음과 같으며 자코비안 행렬이라고 부른다.

$$\mathbf{J}=\begin{bmatrix}-l_1\sin(\theta_1)-l_2\sin(\theta_1+\theta_2) & -l_2\sin(\theta_1+\theta_2)\\ l_1\cos(\theta_1)+l_2\cos(\theta_1+\theta_2) & l_2\cos(\theta_1+\theta_2)\end{bmatrix},\ \mathbf{P}=\begin{bmatrix}\dot{p}_x\\ \dot{p}_y\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\theta}=\begin{bmatrix}\dot{\theta}_1\\ \dot{\theta}_2\end{bmatrix} \tag{3.6}$$

로봇 기구의 자코비안 행렬 $\mathbf{J}$의 의미는 각 회전 관절의 각속도가 주어지면 로봇 말단의 선속도를 식 (3.5)를 이용하여 계산할 수 있음을 나타낼 뿐만 아니라 자코비안 행렬의 역행렬 $\mathbf{J}^{-1}$을 이용하여 로봇 말단의 선속도가 주어지면 각 회전 관절의 각속도를 구할 수 있음을 의미한다.

3.2 자코비안 행렬의 물리적 의미

먼저, 식(3.5)를 다음과 같이 미분 정의식을 이용해서 자세하게 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix}\Delta P_x/\Delta t\\ \Delta P_y/\Delta t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-l_1\sin(\theta_1)-l_2\sin(\theta_1+\theta_2) & -l_2\sin(\theta_1+\theta_2)\\ l_1\cos(\theta_1)+l_2\cos(\theta_1+\theta_2) & l_2\cos(\theta_1+\theta_2)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\Delta\theta_1/\Delta t\\ \Delta\theta_2/\Delta t\end{bmatrix} \tag{3.7}$$

이 때, 시간 Δt는 스칼라이므로 식(3.7)의 양변에 대하여 Δt를 곱하면 식(3.7)은 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{bmatrix}\Delta P_x\\ \Delta P_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-l_1\sin(\theta_1)-l_2\sin(\theta_1+\theta_2) & -l_2\sin(\theta_1+\theta_2)\\ l_1\cos(\theta_1)+l_2\cos(\theta_1+\theta_2) & l_2\cos(\theta_1+\theta_2)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\Delta\theta_1\\ \Delta\theta_2\end{bmatrix}\Rightarrow \Delta P=\mathbf{J}\cdot\Delta\theta \tag{3.8}$$

즉, 식(3.8)은 각 관절의 회전각도 증가량 $\Delta\theta=[\Delta\theta_1\ \ \Delta\theta_2]^T$ 과 로봇 말단의 위치 증가량 $\Delta P=[\Delta P_x\ \ \Delta P_y]^T$ 사이의 관계를 자코비안 $\mathbf{J}$를 이용하여 나타내고 있다. 다음의 그림 3.2는 각 관절의 회전 각도 증가 분량과 로봇 말단 위치 증가 분량 사이의 관계를 시각적으로 나타내고 있다.

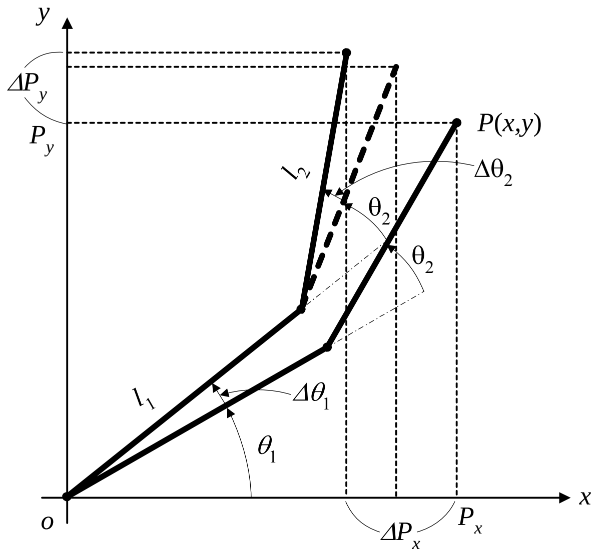

그림 3.2 평면 2링크 회전 관절형 로봇에서 관절 각도 증분과 말단 위치 증분의 관계

예제

그림 3.2에 주어진 평면 2링크 관절형 매니퓰레이터의 링크 l_1의 길이는 0.15m, 링크 l_2의 길이는 0.12m 이다. 그리고 관절의 각도는 $\theta_1 = 30^0, \theta_2 = 60^0$ 일 때, 말단장치 $P_1(x, y)$ 좌표를 구하라. 그리고 각 관절의 각도가 $\theta_1 = 32^0, \theta_2 = 63^0$ 로 변경되었을 때, $P_2(x, y)$ 를 식(3.8)을 이용하여 근사적으로 계산하여라.

→ 먼저, 앞에서 순기구학 방정식 (3.1)과 (3.2)를 이용하여 $P(x, y)$ 를 계산한다.

$$P_{1x} = l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) = 0.15 \times \cos(30^0) + 0.12 \times \cos(30^0 + 60^0) = 0.1299\,(m) \quad \text{(A-1)}$$

$$P_{1y} = l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) = 0.15 \times \sin(30^0) + 0.12 \times \sin(30^0 + 60^0) = 0.1950\,(m) \quad \text{(A-2)}$$

새로운 위치 $P_2(x, y)$ 는 $P_1(x, y)$ 에 대하여 ΔP_x , ΔP_y 가 증가된 것에 해당하므로 $P_2(x, y)$ 를 구하기 위해서 먼저, ΔP_x , ΔP_y 를 구할 필요가 있으며, 식(3.8)을 이용해서 다음과 같이 구할 수 있다. 이 때, 필요한 자코비안 행렬은 $\theta_1 = 30^0, \theta_2 = 60^0$ 을 사용하고 회전 관절의 증가 분량은 $\Delta\theta = [2 \quad 3]^T$ 를 적용한다.

$$\begin{bmatrix} -0.0131 \\ 0.0045 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1950 & -0.12 \\ 0.1299 & 0.00 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.0349 \\ 0.0524 \end{bmatrix} \quad \text{(A-3)}$$

이 때, 식 (A-3)을 계산할 때, 계산기의 모드에 따라서 라디안(Radian) 혹은 도(Degree)를 명확하게 구분하도록 한다. 식(A-3)은 라디안을 사용하였다.

최종적으로 $P_2(x, y)$ 를 다음 관계식을 이용하여 계산한다.

$$P_{2x} = P_{1x} + \Delta P_x = 0.1299 + (-0.0131) = 0.1168 \quad \text{(A-4)}$$

$$P_{2y} = P_{1y} + \Delta P_y = 0.1950 + 0.0045 = 0.1995 \quad \text{(A-5)}$$

정밀도 확인을 위해서 $P_2(x, y)$ 의 정확한 결과는 순기구학을 이용하여 다음과 같이 계산된다.

$$P_{2x} = 0.15 \times \cos(32^0) + 0.12 \times \cos(32^0 + 63^0) = 0.1167(m) \quad \text{(A-6)}$$

$$P_{2y} = 0.15 \times \sin(30^0) + 0.12 \times \sin(30^0 + 60^0) = 0.1990(m) \quad \text{(A-7)}$$

오차는 각각 1.48%, -0.56%로 계산되며 이 값들은 공학적인 측면에서 타당한 범위에 존재한다. 즉, 자코비안 행렬을 이용한 기구학은 공학적으로 받아들여 질 수 있다.

→ 이러한 과정이 순기구학의 경우 자코비안 행렬의 영향력이 미미하지만 역기구학의 경우 상황은 달라진다. 실제로 간단한 평면 2링크 회전 관절형 로봇의 경우 역기구학은 앞에서 기술한 바와 같이 상당히 복잡하다. 그렇지만 식 (3.8)을 다음과 같이 변형하면 역으로 주어진 로봇 말단 위치가 주어지면 각 관절의 회전 각도 증가 분량이 구해진다.

$$\Delta\theta = \mathbf{J}^{-1} \cdot \Delta P \quad \text{(A-8)}$$

식 (A-8)엔 복잡한 역구학 계산 과정 대신에 단순히 자코비안 역행렬과 주어진 말단 위치의 증가 분량 벡터의 곱셈만 존재하게 된다. 식 (A-6)과 (A-7)의 결과를 이용하여 자코비안을 이용한 역기구학을 계산해 보자. 로봇 말단 위치의 증가 분량은 $\Delta\theta = [-0.0132 \quad 0.0040]^T$ 을 다음과 같이 적용한다.

$$\begin{bmatrix} 0.0308 \\ 0.0600 \end{bmatrix}(rad) = \begin{bmatrix} 0.0 & 7.6980 \\ -8.3333 & -12.5093 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0.0132 \\ 0.0040 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1.7643 \\ 3.4356 \end{bmatrix}(\deg) \quad \text{(A-9)}$$

이 결과는 각각 11.79%, 14.52% 오차에 해당한다.

발생하는 오차는 증가 분량 Δ•를 감소 시켜서 개선할 수 있다.

3.3 로봇의 특별한 자세

먼저, 그림 3.3과 같이 특별한 로봇 상태를 고려해 보도록 하자. 이 상태는 2개의 링크가 서로 겹쳐진 상태이다. 첫 번째 경우는 2개의 링크가 뻗은 상태에서 겹쳐져 있으며, 두 번째 경우는 2개의 링크가 접혀진 상태에서 겹쳐져 있는 상태에 해당한다. 이 때, 로봇의 말단 위치가 화살표 방향으로 이동하고자 하는 의도는 실현 불가능하다. 첫 번째 경우는 로봇 링크의 물리적인 길이의 한계 때문이지만 두 번째 경우는 로봇 링크의 물리적인 길이는 한계가 되지 않는다.

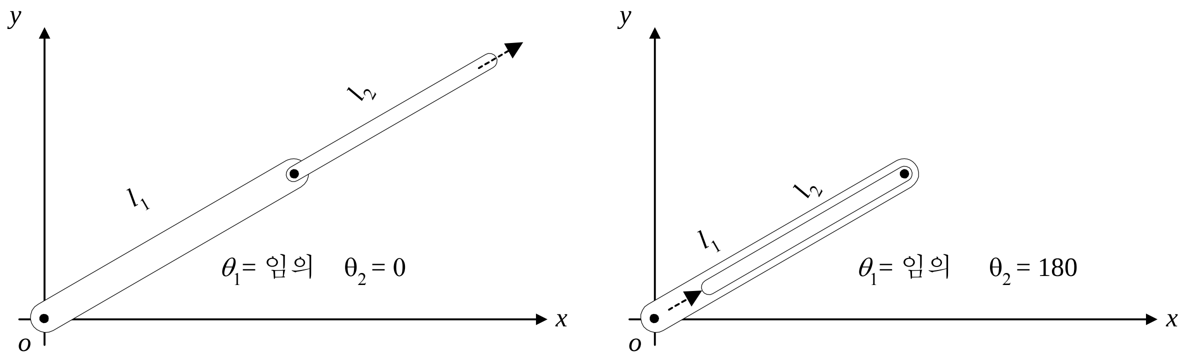

그림 3.3 로봇의 특별한 상태

그림 3.3의 첫 번째 경우에서 θ_1, θ_2 를 미소하게 움직이면 로봇의 말단은 다음의 그림 3.4에 표시된 방향으로만 미소하게 움직이게 된다. 즉, 의도하는 방향에 대하여 직각 방향으로만 움직이게 된다.

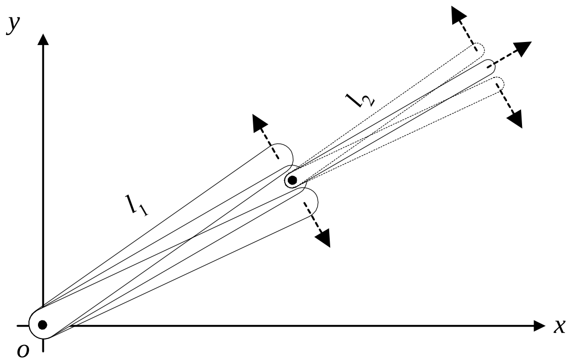

그림 3.4 로봇의 특별한 상태에서 미소한 움직임

한 편, 그림 3.5와 같은 경우는 θ_1, θ_2 를 미소하게 움직여서 로봇의 말단은 어느 방향으로도 움직일 수 있다. 즉, 어떠한 $\Delta X, \Delta Y$ 에 대해서도 대응되는 $\Delta\theta_1, \Delta\theta_2$ 를 구할 수 있다. 이것은 식 (A-8)에 표시된 자코비안 역행렬 $\mathbf{J}^{-1}$ 이 수월하게 구해진다는 것이다. 그렇다면 그림 3.3의 특별한 상태에 해당하는 자코비안 행렬의 특징을 유추할 수 있다. 즉, 자코비안 역행렬 $\mathbf{J}^{-1}$ 이 존재하지 않게 된다.

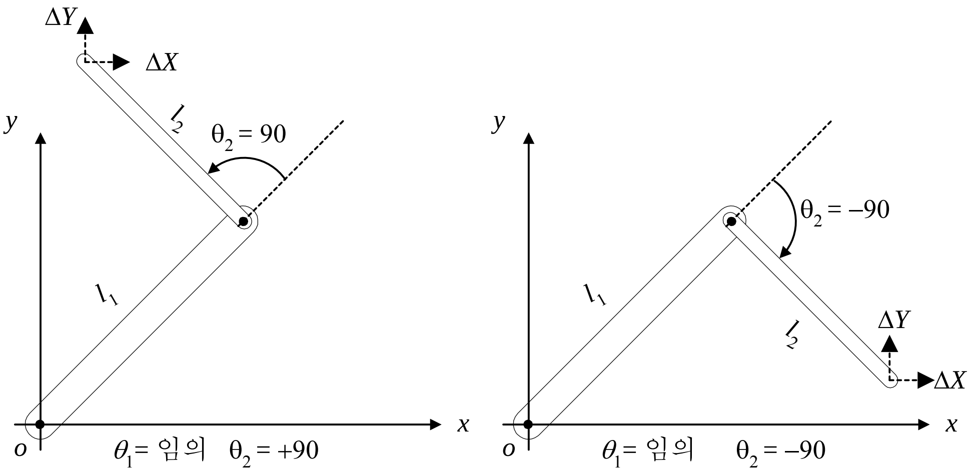

그림 3.5 로봇의 특별한 상태2

이러한 사실을 확인하기 위해서 행렬의 역행렬 계산 여부를 나타내는 행렬식을 이용하여 식 (3.8)의 자코비안 행렬의 행렬식을 그림 3.3과 그림 3.5에 대하여 해석적으로 구해 보도록 하자.

표 3.1 특별한 경우에 대한 자코비안 행렬의 행렬식

경우	자코비안 행렬식
그림3.3 좌측	0
그림3.3 우측	0
그림3.5 좌측	$l_1 l_2$
그림3.5 우측	$-l_1 l_2$

3.4 로봇의 동작 수월성

앞에서 로봇의 상태에 따라서 각 관절이 회전하더라도 로봇 말단이 움직일 수 없는 경우가 있는 반면에 어떠한 위치로도 움직일 수 있는 경우가 있었다. 이 두 가지 경우의 차이점은 자코비안의 행렬식 값임을 알 수 있었다. 즉, 가능하면 자코비안 행렬식의 값이 최대가 되는 상태에서 로봇을 동작 시키는 것이 유리하게 된다. 가능하면 주어진 작업에 대하여 2번 링크의 회전 각도 θ_2 가 ±90도 근방에서 움직일 수 있도록 링크의 길이를 적절히 조절할 필요가 있다.

어떠한 경우에 대해서도 θ_2 가 0도 혹은 180도가 되는 것은 피해야 한다. 그렇다면 θ_2 가 1도 혹은 179일 경우는? 또, θ_2 가 2도 혹은 178일 경우는? 그리고, θ_2 가 3도 혹은 177일 경우는? 물론 θ_2 가 0도가 아닌 값이 되면 로봇은 원활하게 움직이게 될 수 있을 것이다. 그렇지만 θ_2 가 증가하여 90도가 될

때까지 계속해서 원활한 정도는 증가할 것이다. 역으로 θ_2 가 감소하여 0도가 될 때까지 원활한 정도는 감소하여 θ_2 가 0도가 되면 그 원활 정도는 제로가 될 것이다. 그러므로 그 중간값은 중간의 원활 정도가 될 것이다. 그러므로 로봇 말단 움직임의 원활 정도를 해당 자코비안 행렬의 행렬식 크기로 대체할 수 있다. 이것은 언제까지나 '대체할 수 있음'에 유의해야 한다. 또 다른 고차원적인 상황에서 행렬식은 그 원활 정도를 대체할 수 없는 경우도 발생한다. 본 교과목에서는 평이한 경우만을 취급하여 자코비안 행렬의 행렬식이 로봇 말단 움직임의 원활 정도를 나타낸다고 가정한다.